La sfera non è localmente sviluppabile

F. Pugliese

January 26, 2011

Abstract

In questa nota diamo una dimostrazione elementare del fatto che la sfera non è localmente isometrica al piano.

Sia S^2 la sfera in $\mathbb{R}^3$ di raggio R e centro in $O = (0,0,0)$. Vogliamo dimostrare che tale superficie non è isometrica al piano, neanche localmente: in altre parole, nessun dominio della sfera, per quanto piccolo sia, può essere applicato su un dominio del piano in modo da conservare le distanze. A questo scopo, ci avvarremo soltanto di considerazioni di carattere elementare (essenzialmente, una proprietà dei triangoli sferici), senza far ricorso a concetti più sofisticati come quello di curvatura gaussiana.

Supponiamo per assurdo che esista un aperto $W \subset S^2$ e un'isometria $F : W \to F(W) \subset \mathbb{R}^2$ fra W e un aperto $F(W)$ del piano. Siano $A, B, C \in W$ tali che il corrispondente triangolo sferico T (cioè la regione della sfera delimitata dagli archi di minima lunghezza congiungenti i vertici A, B, C fra loro) sia interamente contenuto in W (questa condizione è sempre soddisfatta purchè i vertici siano abbastanza vicini fra loro). Allora l'immagine $F(T)$ sarebbe il triangolo ordinario di vertici $F(A), F(B), F(C)$. Ma essendo i due triangoli in corrispondenza isometrica, essi dovrebbero avere in comune tutte le proprietà definibili in termini della prima forma fondamentale. In particolare, la somma degli angoli interni di T dovrebbe eguagliare quella degli angoli interni di $F(T)$, cioè π. Ma, come subito vedremo, ogni regione della sfera contiene triangoli sferici per i quali la somma degli angoli interni è maggiore di π. In effetti, si consideri il triangolo $T = ABC$, con

$$A = (R,0,0), B = (R\cos\alpha, R\sin\alpha, 0), C = (R\cos\alpha, 0, R\sin\alpha),\ \ \alpha > 0$$

in altri termini, dette u_1, u_2, rispettivamente, la longitudine e la latitudine su S^2, allora: A corrisponde a $u_1 = u_2 = 0$, B corrisponde a $u_1 = \alpha, u_2 = 0$, C corrisponde a $u_1 = u_2 = \alpha$; è chiaro che, se α in modulo è abbastanza piccolo, allora T è contenuto in un intorno arbitrariamente piccolo di A. Calcoliamo le ampiezze degli angoli interni di T. Innanzitutto, è chiaro che l'angolo $\widehat{A}$ è retto (in quanto A, B stanno sull'"equatore", mentre A, C stanno sullo stesso "meridiano"). Per calcolare i rimanenti due angoli, osserviamo innanzitutto che essi, per ragioni di simmetria, sono uguali, quindi basta calcolarne uno solo, per esempio $\widehat{B}$. Allo scopo, bisogna determinare la tangente w al lato (curvilineo)

BC nel punto B. Ma BC è un arco del cerchio massimo passante per B e C. Quindi,

$$w \in < B - O, C - O > \cap T_B(S^2) \tag{1}$$

Dalla (1) si ottengono le due equazioni lineari: la prima,

$$\begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

che esprime la dipendenza lineare di w da $B - O$ e $C - O$, e la seconda,

$$(df)_B(w) = 0, \tag{3}$$

(dove $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2$), che ci dice che w è tangente a S^2 in B. Ma le (2), (3) si riscrivono nel sistema

$$\begin{pmatrix} \sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

le cui ∞^1 soluzioni sono proporzionali a

$$w_1 = \sin\alpha\cos\alpha, w_2 = -\cos^2\alpha, w_3 = 1$$

Quindi, l'angolo $\widehat{B} > 0$ fra w e la direzione $z = (\sin\alpha, -\cos\alpha, 0)$ dell'arco "equatoriale" BA nel punto B soddisfa:

$$\cos\widehat{B} = \cos\widehat{C} = \frac{w \cdot z}{\|w\| \, \|z\|} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}},$$

($\widehat{C}$ è il terzo angolo interno di T, uguale a $\widehat{B}$ per quanto detto prima). Ricordiamo che il nostro scopo è dimostrare che per $\alpha > 0$ sufficientemente piccolo vale $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} > \pi$, cioè (essendo $\widehat{A} = \pi/2$ e $\widehat{B} = \widehat{C}$) che

$$\widehat{B} > \pi/4 \tag{4}$$

A questo scopo, consideriamo la funzione

$$h(\alpha) = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}},$$

per $\alpha \in [0, \pi/2]$. La derivata è:

$$h'(\alpha) = -\frac{\sin^3\alpha}{(1+\cos^2\alpha)^{3/2}}$$

che è negativa nell'intervallo considerato. Quindi h è strettamente decrescente, per cui

$$h(\pi/2) = 0 < \cos\widehat{B} = h(\alpha) < h(0) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

per ogni $\alpha \in]0, \pi/2[$, il che implica, in particolare, la (4).

Dunque, in definitiva: in ogni aperto di S^2 esistono triangoli geodetici la somma dei cui angoli interni è maggiore di π, e conseguentemente nessun dominio di S^2 può applicarsi isometricamente su un dominio del piano euclideo.