

Operatori antisimmetrici

F. Pugliese

November 9, 2011

Abstract

In questa breve nota ricordiamo le principali proprietà degli endomorfismi antisimmetrici di uno spazio vettoriale euclideo. Nel caso di spazi vettoriali tridimensionali, mostriamo la relazione fra operatori antisimmetrici e prodotto vettoriale. Infine, mostriamo che la derivata di una deformazione ortogonale infinitesima è un operatore antisimmetrico.

1 Operatori antisimmetrici

Sia (V^n, \cdot) uno spazio vettoriale euclideo. Un *operatore antisimmetrico* su V è un endomorfismo $F : V \rightarrow V$ tale che

$$F(v) \cdot w = -v \cdot F(w), \quad (1)$$

per ogni $v, w \in V$. L'insieme $Alt(V)$ degli operatori antisimmetrici è un sottospazio vettoriale di $End(V)$ (cioè è chiuso rispetto alla somma di operatori e al prodotto di scalari per operatori), ma è anche una sottoalgebra di Lie di $(End(V), [\cdot, \cdot])$, dove

$$[F, G] \stackrel{\text{def}}{=} F \circ G - G \circ F;$$

ricordiamo che, rispetto a tale operazione, $End(V)$ è un'algebra di Lie, cioè il commutatore $[\cdot, \cdot]$ è bilineare, anticommutativo ($[F, G] = -[G, F]$) e soddisfa l'identità di Jacobi:

$$[[F, G], H] + [[H, F], G] + [[G, H], F] = 0$$

Che $Alt(V)$ sia una sottoalgebra di Lie, segue immediatamente dalla definizione (1): se $F, G \in Alt(V)$, allora

$$\begin{aligned} [F, G](v) \cdot w &= F(G(v)) \cdot w - G(F(v)) \cdot w = -G(v) \cdot F(w) + F(v) \cdot G(w) \\ &= v \cdot G(F(w)) - v \cdot F(G(w)) = -v \cdot [F, G](w), \end{aligned}$$

cioè $[F, G] \in Alt(V)$.

La matrice $A = \|a_{ij}\|$ che rappresenta un operatore antisimmetrico F rispetto a una base *ortonormale* $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ è antisimmetrica:

$$a_{ij} = F(e_j) \cdot e_i = -F(e_i) \cdot e_j = -a_{ji}$$

Viceversa, ogni matrice antisimmetrica rappresenta, in una base ortonormale fissata, un elemento di $Alt(V)$. Da ciò segue, in particolare, che

$$\dim Alt(V) = \frac{n(n-1)}{2},$$

(con $n = \dim V$), in quanto tale è il numero di entrate non nulle in una matrice antisimmetrica generica d'ordine n . Notiamo che lo spazio $Sym(V)$ degli operatori simmetrici su V ha dimensione $n(n+1)/2 = n - \dim Alt(V)$ e che i due sottospazi sono trasversali, nel senso che l'unico operatore simultaneamente simmetrico e antisimmetrico è quello identicamente nullo; dunque,

$$End(V) = Sym(V) \oplus Alt(V)$$

In particolare, ogni operatore $F \in End(V)$ si può decomporre in modo unico nella sua parte simmetrica e in quella antisimmetrica:

$$F = F_{sym} + F_{alt},$$

con

$$F_{sym} = \frac{1}{2}(F + F^*), \quad F_{alt} = \frac{1}{2}(F - F^*);$$

si ricordi che $F^* \in End(V)$ è l'*operatore aggiunto* di F , definito dall'identità

$$F^*(v) \cdot w = v \cdot F^*(w),$$

per ogni $v, w \in V$, e rappresentato in una base ortonormale dalla trasposta della matrice che rappresenta F .

Una proprietà caratteristica degli operatori antisimmetrici è la seguente.

Proposition 1 *Sia $F \in End(V)$. Allora F è antisimmetrico se e solo se $F(v)$ è ortogonale a v , per ogni $v \in V$*

Proof. In effetti, se $F \in Alt(V)$, allora per la (1) con $v = w$ si ha

$$F(v) \cdot v = -v \cdot F(v)$$

da cui

$$F(v) \cdot v = 0, \tag{2}$$

per ogni $v \in V$. Viceversa, sia $F \in End(V)$ tale da soddisfare l'identità (2). Si consideri la forma bilineare simmetrica

$$b(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} F(v) \cdot w + v \cdot F(w)$$

Evidentemente, vale

$$b(v, v) = 0,$$

per ogni $v \in V$; ma allora, sfruttando la "legge del parallelogramma" si ha

$$b(v, w) = \frac{1}{2}[b(v+w, v+w) - b(v, v) - b(w, w)] = 0,$$

per ogni $v, w \in V$, cioè F è antisimmetrico. ■

Dunque, gli operatori antisimmetrici sono caratterizzati dal fatto di trasformare ogni vettore in uno ad esso ortogonale. Un'immediata conseguenza di ciò è che, se $F \in \text{Alt}(V)$ e $W \subset V$ è un sottospazio F -invariante (cioè $F(W) \subset W$), allora anche W^\perp lo è. Infatti, sia $z \in W^\perp$, allora, per ogni $w \in W$ vale

$$F(z) \cdot w = -z \cdot F(w) = 0,$$

cioè anche $F(z) \in W^\perp$. Questa proprietà è molto utile per classificare gli operatori antisimmetrici a meno di isometrie. Infatti, se si è determinato un sottospazio F -invariante W , allora si ottiene automaticamente il sottospazio invariante W^\perp in somma diretta col primo ($V = W \oplus W^\perp$), di modo che F si può scomporre nella somma diretta delle sue restrizioni ai due sottospazi (restrizioni che, evidentemente, sono ancora operatori antisimmetrici su W e su W^\perp , rispettivamente).

Una conseguenza immediata di quanto appena detto è la seguente proprietà (che gli operatori antisimmetrici condividono con quelli simmetrici).

Proposition 2 *Sia $F \in \text{Alt}(V)$ un operatore antisimmetrico sullo spazio vettoriale euclideo (V^n, \cdot) ; allora*

$$(\text{Ker} F)^\perp = \text{Im} F; \tag{3}$$

Proof. In effetti, se $z = F(v) \in \text{Im} F$ e $w \in \text{Ker} F$, allora

$$z \cdot w = F(v) \cdot w = -v \cdot F(w) = 0,$$

cioè $z \in (\text{Ker} F)^\perp$. Quindi, $\text{Im} F \subset (\text{Ker} F)^\perp$; d'altro canto,

$$\dim \text{Im} F = n - \dim \text{Ker} F = \dim (\text{Ker} F)^\perp,$$

sicchè vale proprio l'uguaglianza (3). ■

in particolare, $\text{Im} F$ è un sottospazio F -invariante, e quindi

$$F = F|_{\text{Im} F} \oplus \mathbf{0}_{\text{Ker} F}, \tag{4}$$

dove il primo addendo è un automorfismo di $\text{Im} F$, mentre il secondo è l'operatore identicamente nullo sul $\text{Ker} F$. Ciò consente di ridurre il problema della classificazione degli operatori antisimmetrici (rispetto al gruppo delle isometrie) allo studio dei soli operatori antisimmetrici non degeneri.

Prima di passare allo studio dello spettro di un operatore antisimmetrico, facciamo un'ultima osservazione: se V ha dimensione dispari, allora ogni $F \in \text{Alt}(V)$ è degenere. Infatti, detta A la matrice (antisimmetrica) di F in una data base ortonormale di V^n , con n dispari, vale:

$$|A| = |A^T| = |-A| = (-1)^n |A| = -|A|,$$

da cui segue $|F| = |A| = 0$. Da questo semplice risultato e dalla decomposizione (4) segue, in particolare, che l'immagine di un operatore antisimmetrico ha sempre dimensione pari; infatti, il primo addendo della somma è un operatore antisimmetrico invertibile, e quindi il suo dominio, per quanto appena visto, non può avere dimensione dispari.

Esaminiamo, ora, lo spettro di un generico $F \in \text{Alt}(V)$. Innanzitutto, ricordiamo la seguente fondamentale interpretazione geometrica degli autovalori complessi di un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale.

Theorem 3 *Sia V^n uno spazio vettoriale reale e sia $F \in \text{End}(V)$. Allora ad ogni autovalore complesso $\mu + i\nu, \nu \neq 0$, di F corrispondono due vettori indipendenti $w, z \in V$ tali che*

$$\begin{cases} F(w) = \mu w - \nu z \\ F(z) = \nu w + \mu z \end{cases} \quad (5)$$

Proof. Sia

$$\widehat{V} \stackrel{\text{def}}{=} \{u + iv \mid u, v \in V\}$$

il complessificato di V (che, con le ovvie definizioni di somma e di prodotto per numeri complessi, è uno spazio vettoriale complesso di dimensione n). Sia

$$\widehat{F} : \widehat{V} \rightarrow \widehat{V}$$

l'estensione di F a \widehat{V} , definita da

$$\widehat{F}(u + iv) \stackrel{\text{def}}{=} F(u) + iF(v)$$

Evidentemente, se F è rappresentato, in una base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ di V , dalla matrice A , questa stessa matrice rappresenta anche \widehat{F} nella stessa base (considerata, però, come base di \widehat{V} !). Dunque, se $\mu + i\nu$ è un autovalore complesso di F , esso è anche un autovalore ordinario di \widehat{F} , cioè esiste un vettore complesso $w + iz$ tale che

$$\widehat{F}(w + iz) = (\mu + i\nu)(w + iz),$$

relazione che, scomposta nelle sue parti reale e immaginaria, ci dà proprio le (5). L'indipendenza di w e z segue dal fatto che, in caso contrario, avremmo $w = 0$ oppure $w \neq 0, z = kw$ per qualche $k \in \mathbb{R}$: nel primo caso la (5)₁ implicherebbe che anche $z = 0$ (per ipotesi è $\nu \neq 0$), cioè sarebbe $w + iz = 0$, cosa impossibile in quanto si tratta di un autovettore di \widehat{F} ; nel secondo caso,

sostituendo l'espressione di z nelle (5) ed eguagliandole si otterrebbe (sempre ricordando che $\nu \neq 0$) la relazione assurda $k^2 = -1$. ■

Sfruttando la proposizione precedente, dimostriamo il seguente risultato.

Theorem 4 *Sia (V^n, \cdot) uno spazio vettoriale euclideo. Sia $F \in \text{Alt}(V)$. Allora l'unico possibile autovalore reale è 0, mentre ogni autovalore non reale è puramente immaginario.*

Proof. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di F , allora esiste $v \neq 0$ tale che $F(v) = \lambda v$; ma, per la (2),

$$0 = F(v) \cdot v = \lambda v^2,$$

da cui segue che $\lambda = 0$.

Se $\mu \pm i\nu, \nu \neq 0$, è una coppia di autovalori complessi coniugati, allora, per il teorema precedente, esistono $w, z \in V$ linearmente indipendenti e tali che valgono le (5). Ma allora, tenendo conto della (2), si ha

$$0 = w \cdot F(w) = \mu w^2 - \nu z \cdot w$$

$$0 = z \cdot F(z) = \nu w \cdot z + \mu z^2$$

per cui, sommando le due relazioni,

$$\mu(w^2 + z^2) = 0,$$

da cui $\mu = 0$ ■

Dunque, nel caso di operatori antisimmetrici, gli autovalori complessi sono della forma $\pm i\nu$ e le (5) si riducono a

$$\begin{cases} F(w) = -\nu z \\ F(z) = \nu w \end{cases}; \quad (6)$$

Notiamo alcune cose importanti. Innanzitutto, la coppia (w, z) associata alla coppia di autovalori $\pm i\nu$ di F non è univocamente determinata. Infatti, eliminando z dal sistema (6) si ricava

$$w \in \text{Ker}(F^2 + \nu^2 I), \quad z = -\frac{1}{\nu} F(w); \quad (7)$$

dunque, all'autovalore $\pm i\nu$ corrispondono tutte le coppie (w, z) soddisfacenti le (7); si noti che l'operatore $F^2 + \nu^2 I$ è degenere (cioè, ha un Ker non nullo) perchè, usando le notazioni della dimostrazione del teorema 3, si ha

$$\widehat{F^2 + \nu^2 I} = \widehat{F}^2 + \nu^2 \widehat{I} = (\widehat{F} + i\nu \widehat{I}) \circ (\widehat{F} - i\nu \widehat{I})$$

e quindi $Ker(\widehat{F^2 + \nu^2 I}) \supset Ker(\widehat{F} - i\nu\widehat{I})$, e quest'ultimo, in quanto autospazio di \widehat{F} associato all'autovalore $i\nu$, è non banale. D'altra parte, è evidente che

$$Ker(\widehat{F^2 + \nu^2 I}) = \{u + iv \mid u, v \in Ker(F^2 + \nu^2 I)\}$$

per cui anche $Ker(F^2 + \nu^2 I) \neq \{0\}$. In definitiva, all'autovalore immaginario $\pm i\nu$ è associato, non un solo piano invariante, ma diversi, precisamente tutti i piani della forma

$$S_w = \langle w, z = -\frac{1}{\nu}F(w) \rangle = \langle w, F(w) \rangle,$$

al variare di $w \in Ker(F^2 + \nu^2 I)$. Evidentemente, se $w, w' \in Ker(F^2 + \nu^2 I)$ sono tali che $w' \in S_w$, allora

$$F(w') \in \langle F(w), F^2(w) = -\nu^2 w \rangle = S_w,$$

e quindi $S_w = S_{w'}$; se, invece, $w' \notin S_w$