

Algebra lineare e teoria dei grafi

Fabrizio Pugliese

January 22, 2013

Abstract

In queste note diamo brevi cenni di teoria algebrica e spettrale dei grafi.

1 Matrici associate a un grafo

1.1 Matrice d'adiacenza

Sia $G = (V, E)$ un grafo (non diretto semplice); $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ è l'insieme dei vertici, $E \subset [V]^2 = \{\text{coppie non ordinate di elementi di } V\}$ è l'insieme dei lati.

Definition 1 *La matrice d'adiacenza di G è la matrice $A = A_G = \|a_{ij}\|_{i,j=1,\dots,n}$ definita da*

$$a_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{se } v_i v_j \in E \\ 0 & \text{se } v_i v_j \notin E \end{cases} \quad (1)$$

Evidentemente, A è simmetrica e a traccia nulla. Inoltre, essa non dipende solo da G , *ma anche dal particolare ordine scelto per i vertici*, ordine che, d'altro canto, *non ha alcuna importanza nella nozione di grafo*. Tuttavia, nonostante quest'arbitrarietà nella definizione di A_G , ci sono molte caratteristiche di questa matrice *indipendenti dall'ordinamento fissato in V* .

Vediamo come si trasforma la matrice d'adiacenza a seguito di una permutazione dei vertici del grafo. Sia

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma_1 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

una permutazione dell'insieme $\{1, \dots, n\}$, a cui corrisponde il riordinamento $(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_n})$ dei vertici di V . Se $A = \|a_{ij}\|$ era la matrice d'adiacenza iniziale, dopo il riordinamento essa diventa $A^\sigma = \|a_{ij}^\sigma\|$, con

$$a_{ij}^\sigma = \begin{cases} 1 & \text{se } v_{\sigma_i}v_{\sigma_j} \in E \\ 0 & \text{se } v_{\sigma_i}v_{\sigma_j} \notin E \end{cases};$$

in altri termini,

$$a_{ij}^\sigma = a_{\sigma_i\sigma_j}$$

Da questa formula si vede che A^σ è ottenuta da A applicando simultaneamente alle righe e alle colonne di quest'ultima la permutazione σ . Ora, permutare le colonne (o le righe) di una matrice è un'operazione lineare nello spazio delle matrici. Precisamente, applicare la permutazione σ alle colonne di una matrice equivale a moltiplicarla a destra per la matrice di permutazione $E_\sigma = \|e_{ij}^\sigma\|$ definita da

$$e_{ij}^\sigma = \delta_{i\sigma_j}; \tag{2}$$

conseguentemente, applicare σ alle *righe* di una matrice B equivale a moltiplicare a destra B^T per E_σ e trasporre il risultato. Quindi

$$A^\sigma = ((AE_\sigma)^T E_\sigma)^T = E_\sigma^T A E_\sigma \tag{3}$$

D'altra parte, le matrici di permutazione sono ortogonali, cioè

$$E_\sigma^T = E_\sigma^{-1};$$

infatti, dalla definizione (2) segue

$$(E_\sigma E_\sigma^T)_{ij} = \sum_k e_{ik}^\sigma e_{jk}^\sigma = \sum_k \delta_{i,\sigma(k)} \delta_{j,\sigma(k)} = \delta_{j,\sigma(\sigma^{-1}(i))} = \delta_{ji} = \delta_{ij};$$

inoltre, la mappa $\sigma \mapsto E_\sigma$ è un monomorfismo del gruppo simmetrico S_n in $GL(n, \mathbb{K})$, cioè

$$E_{\sigma\tau} = E_\sigma E_\tau, \quad \text{per ogni } \sigma, \tau \in S_n$$

$$E_\sigma = I_n \text{ solo se } \sigma \text{ è la permutazione identica}$$

in particolare, E_σ è invertibile per ogni $\sigma \in S_n$, e $E_\sigma^{-1} = E_{\sigma^{-1}}$. Dunque, la (3) si riscrive

$$A^\sigma = E_\sigma^{-1} A E_\sigma$$

Ma questo significa che, qualunque sia la permutazione σ dei vertici del grafo G , la nuova matrice d'adiacenza A^σ è simile a quella iniziale A . In particolare, A ed A^σ hanno lo stesso polinomio caratteristico; quindi, autovalori, autovettori, coefficienti del polinomio caratteristico, ecc. *sono quantità legate direttamente a G* , e non dipendenti dalla particolare scelta della matrice d'adiacenza. Altri esempi di invarianti sono il rango di A e la sua segnatura (quest'ultima, infatti, è invariante per congruenza, e quindi, per la (3), è la stessa per tutte le matrici d'adiacenza di G). Lo studio degli invarianti algebrici di un grafo, definiti tramite la sua matrice d'adiacenza o altre matrici caratteristiche da essa derivate (la matrice d'incidenza, la matrice laplaciana, ecc.), viene chiamato *teoria algebrica dei grafi* (o anche, a volte, in termini più restrittivi, *teoria spettrale dei grafi*).

Notiamo che, per lo studio delle proprietà spettrali di un grafo, ci si può sempre ridurre al caso in cui esso sia *connesso*. Infatti, se G non è connesso e G_1, \dots, G_r sono le sue componenti connesse, è chiaro che, pur di numerare i vertici opportunamente (precisamente: prima i vertici di G_1 , poi quelli di G_2 , ecc.), la matrice d'adiacenza di G sarà della forma a blocchi

$$A = A_1 \oplus \dots \oplus A_r,$$

con A_i matrice d'adiacenza di G_i ; di conseguenza il polinomio caratteristico si scompone nel prodotto:

$$P_A(x) = p_{A_1}(x) \dots p_{A_r}(x)$$

Per questo motivo, spesso, nel seguito, supporremo che i grafi di cui parliamo siano connessi.

1.2 Matrice d'incidenza

Una rappresentazione matriciale alternativa di un grafo G è data dalla *matrice d'incidenza* $B = B_G = \|b_{ih}\|$; si tratta della matrice rettangolare $n \times m$ ($n = |V|, m = |E|$) definita da

$$b_{ih} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{se } v_i \in e_h \\ 0 & \text{se } v_i \notin e_h \end{cases},$$

per ogni $v_i \in V, e_h \in E$. Evidentemente, dalla conoscenza della matrice d'adiacenza si ricava la matrice d'incidenza, e viceversa; precisamente, vale:

$$BB^T = \Delta + A, \quad (4)$$

dove $\Delta = \|d(v_i)\delta_{ij}\|$ è la matrice diagonale dei gradi dei vertici di G . Infatti,

$$(BB^T)_{ij} = \sum_{h=1}^m b_{ih}b_{jh} = \sum_{e_h \ni v_i, v_j} 1 = \begin{cases} a_{ij} & \text{se } i \neq j \\ d(v_i) & \text{se } i = j \end{cases},$$

cioè la (4). Un'altra formula lega la matrice d'incidenza B di G a quella d'adiacenza $A_L = A_{L(G)}$ del grafo lineare $L(G)$, cioè il grafo che ha per "vertici" i lati di G e per "lati" le coppie di lati di G che hanno un vertice in comune:

$$B^T B = 2I_m + A_L; \quad (5)$$

in effetti, se $A_L = \|\tilde{a}_{ij}\|$, vale

$$(\tilde{B}^T \tilde{B})_{hk} = \sum_{i=1}^n \beta_{ih}\beta_{ik} = \sum_{v_i \in e_h, e_k} 1 = \begin{cases} 2 & \text{se } h = k \\ \tilde{a}_{hk} & \text{se } h \neq k \end{cases},$$

cioè la (5).

Un'immediata conseguenza della (5) è la seguente proprietà spettrale dei grafi lineari.

Theorem 2 *Gli autovalori di un grafo lineare sono tutti maggiori o uguali a -2*

Proof. Sia $G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$, un grafo ed $L(G)$ il suo grafo lineare, e siano A, A_L le rispettive matrici d'adiacenza. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un autovalore di $L(G)$, allora esiste $y \in \mathbb{R}^m$ tale che

$$A_L y = \lambda y;$$

ma allora, per la (5), vale

$$B^T B y = 2y + A_L y = (2 + \lambda)y,$$

cioè $\lambda+2$ è un autovalore di $B^T B$; ma quest'ultima è simmetrica e semidefinita positiva, in quanto per ogni $z \in \mathbb{R}^m$ vale

$$z^T B^T B z = (Bz)^T (Bz) \geq 0;$$

di conseguenza, tutti gli autovalori di $B^T B$ (e quindi anche $\lambda + 2$) sono non negativi ■

Una variante molto diffusa della nozione di matrice d'incidenza è la seguente. Si orientino arbitrariamente i lati di G e si consideri la matrice $D = D_G = \|d_{ij}\|$ definita da

$$d_{ih} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{se } v_i \notin e_h \\ 1 & \text{se } v_i \text{ è il primo vertice di } e_h \\ -1 & \text{se } v_i \text{ è il secondo vertice di } e_h \end{cases}, \quad (6)$$

per ogni $v_i \in V, e_h \in E$. Questa matrice dipende dall'orientazione fissata in G . Tuttavia la matrice (quadrata d'ordine n) DD^T è indipendente dall'orientazione. Infatti, vale:

$$DD^T = \Delta - A \quad (7)$$

La dimostrazione è un semplice calcolo:

$$(DD^T)_{ij} = \sum_{h=1}^m d_{ih} d_{jh} = \begin{cases} 0 & \text{se } v_i \not\sim v_j \\ -1 & \text{se } v_i \sim v_j \\ d_i & \text{se } v_i = v_j \end{cases} \quad (8)$$

(dove $v \sim z$ significa "v adiacente a z"); evidentemente, le n^2 relazioni (4) equivalgono alla (7). La matrice simmetrica semidefinita positiva

$$L = \Delta - A = DD^T \quad (9)$$

si chiama *laplaciano* di G e ha grande importanza nella teoria algebrica dei grafi; vedremo più avanti alcune applicazioni di questa nozione.

1.3 Operatori lineari associati a un grafo

Diamo ora una definizione alternativa della matrice d'adiacenza (la "vera" definizione, in effetti), da cui seguirà immediatamente l'invarianza del suo polinomio caratteristico, ecc.

Sia $G = (V, E)$ il grafo (non diretto, semplice) già considerato nella sezione precedente, e sia $|V| = n, V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Consideriamo l'insieme

$$\mathcal{F}(G) = \{f : V \rightarrow \mathbb{K}\} = \mathbb{K}^V,$$

dove \mathbb{K} è un campo fissato (per esempio, \mathbb{R} , o \mathbb{C} , o un campo di Galois, ecc.). Tale insieme ha una naturale struttura di spazio vettoriale di dimensione n su \mathbb{K} :

$$(f + g)(v) \stackrel{\text{def}}{=} f(v) + g(v)$$

$$(kf)(v) \stackrel{\text{def}}{=} kf(v),$$

per ogni $f, g \in \mathcal{F}(G), k \in \mathbb{K}, v \in V$. Una base "canonica" di tale spazio è costituita dalle funzioni caratteristiche dei vertici:

$$\chi = \{\chi_v\}_{v \in V}, \tag{10}$$

con

$$\chi_v(w) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{se } w = v \\ 0 & \text{se } w \neq v \end{cases},$$

per ogni $v, w \in V$; evidentemente,

$$f = \sum_{v \in V} f(v)\chi_v, \tag{11}$$

per ogni $f \in \mathcal{F}(G)$, cioè le componenti di f in χ sono i valori di f .

Si può dotare $\mathcal{F}(G)$ anche di un prodotto scalare:

$$f \cdot g \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{v \in V} f(v)g(v), \tag{12}$$

per ogni $f, g \in \mathcal{F}(G)$; evidentemente, la base (10) è ortonormale rispetto a tale prodotto. Quindi, vale

$$f(v) = f \cdot \chi_v, \quad (13)$$

per ogni $f \in \mathcal{F}(G), v \in V$.

Associamo ora a G un operatore lineare $\mathcal{A}_G \in \text{End}_{\mathbb{K}}(\mathcal{F}(G))$, detto *operatore d'adiacenza* di G , definito dalla formula

$$\mathcal{A}_G(f)(v) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{w \sim v} f(w), \quad (14)$$

per ogni $f \in \mathcal{F}(G), v \in V$ (qui e nel seguito il simbolo \sim significa "adiacente a" o "incidente con"); evidentemente, un'espressione alternativa è

$$\mathcal{A}_G(f)(v) = d(v)\bar{f}_v,$$

dove $d(v)$ è il grado di v e

$$\bar{f}_v = \frac{1}{d(v)} \sum_{w \sim v} f(w)$$

è il valor medio di f sull'insieme dei vertici di G adiacenti a v . È facile vedere che la matrice di \mathcal{A}_G nella base $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_n)$ coincide con la matrice d'adiacenza A_G definita da (1); infatti, dalla definizione (14) e dalla relazione (11) applicata al caso $f = A_G(\chi_i)$ segue che l'entrata (i, r) della matrice di \mathcal{A}_G è

$$\mathcal{A}_G(\chi_i)(v_r) = \sum_{v_h \sim v_r} \chi_i(v_h) = \sum_{v_h \sim v_r} \delta_{ih} = a_{ih}$$

Dunque, la matrice di \mathcal{A}_G nella base ortonormale χ è simmetrica, il che implica che l'operatore stesso è simmetrico, cioè che vale

$$\mathcal{A}_G(f) \cdot g = f \cdot \mathcal{A}_G(g) \quad (15)$$

per ogni $f, g \in \mathcal{F}(G)$. A questo stesso risultato si arriva direttamente dalla definizione (14):

$$\mathcal{A}_G(f) \cdot g = \sum_v \mathcal{A}_G(f)(v)g(v) = \sum_{v \in V} \sum_{w \sim v} f(w)g(v) = \sum_{vw \in E} [f(v)g(w) + f(w)g(v)];$$

poichè l'ultima espressione è simmetrica rispetto a f e g , ne consegue la (15). Essendo simmetrico, l'operatore \mathcal{A}_G ha tutti i suoi n autovalori (contati con le loro molteplicità) sul campo reale ed ammette una base ortonormale di autovettori. L'insieme degli autovalori si chiama *spettro* del grafo G . Com'è noto dall'algebra lineare (v. APPENDICE), tali autovalori coincidono con i valori stazionari della restrizione della forma quadratica

$$\widehat{\mathcal{A}}_G : \mathcal{F}(G) \ni f \longmapsto A_G(f) \cdot f \in \mathbb{R}$$

alla sfera unitaria $S = \{f \in F(G) \mid f \cdot f = 1\}$; con i corrispondenti punti critici di $\widehat{\mathcal{A}}_G|_S$ si può formare una base ortonormale di autovettori per \mathcal{A}_G . In particolare, gli autovalori massimo $\lambda_{\max}(G)$ e minimo $\lambda_{\min}(G)$ sono anche gli estremi di $\widehat{\mathcal{A}}_G|_S$ (estremi che sicuramente esistono, in quanto $\widehat{\mathcal{A}}_G$ è continua e S è un compatto di $\mathcal{F}(G)$). Da quest'osservazione si ricavano alcune importanti proprietà dello spettro di un grafo, che riassumiamo nel seguente teorema.

Theorem 3 *TEOREMA 5, CAP 8 DEL BOLLOBAS*

Proof. E' il teorema sulle proprietà degli autovalori dell'operatore (o, equivalentemente, della matrice) di adiacenza di G . La dimostrazione che troverete nel libro di Bollobas ("Graph Theory, an Introductory Course, pag.155") è più succinta di quella data a lezione, vi conviene quindi studiarla assieme alle note che avete preso in classe. Nel corso della dimostrazione si fa uso delle proprietà estremali degli autovalori di un operatore simmetrico, chi non le conoscesse può consultare la sezione 3.2 alla fine di queste note. ■

Oltre allo spazio $\mathcal{F}(G)$ delle funzioni scalari su V , un altro spazio vettoriale naturalmente associato a G è

$$\mathcal{H}(G) \stackrel{\text{def}}{=} \{h : E \rightarrow \mathbb{K}\} = \mathbb{K}^E \simeq \mathbb{K}^m$$

($\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots$), cioè lo spazio delle funzioni a valori in \mathbb{K} definite sui lati di G . Come nel caso di $\mathcal{F}(G)$, anche $\mathcal{H}(G)$ possiede una base canonica $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_m)$ (definita a meno dell'ordine dei suoi elementi), data dalle funzioni caratteristiche $\psi_h = \psi_{e_h}$:

$$\psi_h(e_k) = \delta_{hk},$$

$h, k = 1, \dots, m$. Analogamente alla (11) vale:

$$h = \sum_{e \in E} h(e) \psi_e, \quad (16)$$

per ogni $h \in \mathcal{H}$, cioè le componenti di h nella base Ψ sono i valori di h . Inoltre, sempre in analogia con $\mathcal{F}(G)$, anche $\mathcal{H}(G)$ è munita (nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) del prodotto scalare

$$h \cdot k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{e \in E} h(e)k(e), \quad (17)$$

$h, k \in \mathcal{H}(G)$, rispetto al quale Ψ è una base ortonormale, per cui vale l'analogia di (13):

$$h(e) = h \cdot \psi_e, \quad (18)$$

per ogni $h \in \mathcal{H}(G), e \in E$.

Fissata arbitrariamente un'orientazione su G , si consideri l'applicazione lineare $\mathcal{D}_G : \mathcal{H}(G) \rightarrow \mathcal{F}(G)$ definita da

$$\mathcal{D}_G(h)(v) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{e \sim v} (-1)^{e,v} h(e), \quad (19)$$

per ogni $h \in \mathcal{H}(G), v \in V$. Il coefficiente $(-1)^{e,v}$ è per definizione pari : a 0 se $e \in E$ non è incidente con v , a 1 se e esce da v e a -1 se e entra in v (il simbolo \sim sta per "incidente con"). In altri termini, il valore della funzione $\mathcal{D}_G(h) \in \mathcal{F}(G)$ nel vertice v è uguale alla somma dei valori di h sui lati incidenti con v , presi col segno + o - a seconda che il lato esca o entri in v , rispettivamente. E' facile vedere che la matrice di \mathcal{D}_G nelle basi $\Psi = (\psi_j \mid j = 1, \dots, m), \chi = (\chi_i \mid i = 1, \dots, n)$ è proprio la matrice d'incidenza orientata D_G definita dalle (6); infatti, dalla definizione (19) (e dalla (11) applicata al caso $f = \mathcal{D}_G(\psi_j)$) segue che l'entrata (i, j) della matrice di \mathcal{D}_G è

$$\mathcal{D}_G(\psi_j)(v_i) = \sum_{e_s \sim v_i} (-1)^{e_s, v_i} \psi_j(e_s) = \sum_{e_s \sim v_i} (-1)^{e_s, v_i} \delta_{j_s} = (-1)^{e_j, v_i} = d_{ij};$$

dunque, in definitiva, vale

$$\mathcal{D}_G(h)(v_i) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{r=1}^m d_{ri} h(e_r), \quad (20)$$

$h \in \mathcal{H}(G), i = 1, \dots, n.$

L'operatore \mathcal{D}_G è detto *operatore d'incidenza* (orientato) di G e dipende, come la matrice D_G che lo rappresenta rispetto alle basi canoniche, dall'orientazione arbitrariamente fissata in G . Tuttavia, molte caratteristiche e proprietà associate a tale operatore risultano *indipendenti* dall'orientazione fissata. Come primo esempio di ciò, dimostriamo il seguente semplice risultato.

Theorem 4 *Il rango di \mathcal{D}_G è uguale a $n-c$, dove c è il numero di componenti connesse di G .*

Proof. Innanzitutto, osserviamo che ci si può ridurre al caso connesso ($c = 1$). Infatti, se G è non connesso, detta $G_r = (V_r, E_r)$ l' r -ma componente, $r = 1, \dots, c$, possiamo ordinare i vertici di G mettendo prima i vertici di V_1 , poi quelli di V_2 , ecc., e analogamente possiamo fare per i lati (prima quelli di E_1 , poi quelli di E_2 , ecc.); in tal caso, la matrice d'incidenza avrà la forma a blocchi:

$$D_G = D_{G_1} \oplus D_{G_2} \oplus \dots \oplus D_{G_c},$$

con \tilde{B}_{G_r} matrice d'incidenza di G_r ; è chiaro, dunque, che il rango di \tilde{B}_G sarà la somma dei ranghi delle singole \tilde{B}_{G_r} .

Supponiamo, quindi, che G sia connesso, vogliamo dimostrare che $D = D_G$ ha rango $n-1$ (ovviamente, essendo G connesso, è $m \geq n-1$). Allo scopo, siano $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n$ le righe di D (corrispondenti ai vertici di G); evidentemente, la loro somma è nulla (perchè ogni colonna di D , corrispondendo a un lato e di G , contiene due soli elementi non nulli, un 1 e un -1); quindi, $\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n$ sono dipendenti, cioè il rango di D è al più $n-1$. Sia

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{d}_i = 0 \tag{21}$$

una relazione lineare non banale (cioè con almeno un coefficiente non nullo) fra le righe; voglio dimostrare che

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n \tag{22}$$

In effetti, sia $\lambda_k \neq 0$; allora, per ogni vertice v_s adiacente a v_k , la colonna di D corrispondente al lato $e_j = v_k v_s$ conterrà solo due elementi non nulli, il

k-mo e l's-mo, che avranno valore 1 e -1. Quindi, la j-ma componente della relazione vettoriale sarà

$$\lambda_k - \lambda_s = 0;$$

ripetendo il ragionamento a partire da v_s e un qualunque vertice v_r ad esso adiacente, otterremo $\lambda_r = \lambda_s$, ecc. E siccome G è connesso, alla fine otterremo la (22). Dunque, l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo (21) ha dimensione 1, ovvero la matrice del sistema, cioè D , ha rango $n - 1$. ■

Come per tutti gli operatori lineari fra spazi euclidei, si può considerare l'operatore aggiunto $\mathcal{D}_G^* : \mathcal{F}(G) \rightarrow \mathcal{H}(G)$, definito dall'identità

$$\mathcal{D}_G^*(f) \cdot h = f \cdot \mathcal{D}_G(h),$$

per ogni $f \in \mathcal{F}(G), h \in \mathcal{H}(G)$. Calcoliamo esplicitamente $\mathcal{D}_G^*(f)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_G^*(f)(e) &= \mathcal{D}_G^*(f) \cdot \psi_e = f \cdot \mathcal{D}_G(\psi_e) = \sum_{v \in V} f(v) \mathcal{D}_G(\psi_e)(v) \\ &= \sum_{v \in V} f(v) \sum_{\varepsilon \sim v} (-1)^{\varepsilon, v} \psi_e(\varepsilon) = \sum_{v \sim e} (-1)^{e, v} f(v) \\ &= f(e') - f(e''), \end{aligned} \tag{23}$$

dove e', e'' sono, rispettivamente, il primo e il secondo vertice di e (rispetto all'orientazione fissata su G). In particolare, ponendo $f = \chi_i, e = e_j$, si ricava l'elemento (j, i) della matrice di \mathcal{D}_G^* (rispetto alle basi canoniche χ, Ψ):

$$\mathcal{D}_G^*(\chi_i)(e_j) = \chi_i(e'_j) - \chi_i(e''_j) = (-1)^{e_j, v_i} = d_{ij},$$

cioè la matrice di \mathcal{D}_G^* è D_G^T , la trasposta di D_G .

E' chiaro dalla (23) che

$$\text{Ker} \mathcal{D}_G^* = \{\text{funzioni costanti sulle componenti connesse di } E(G)\};$$

cioè, se G è connesso,

$$\text{Ker} \mathcal{D}_G^* = \langle u \rangle^\perp,$$

con $u = (1, \dots, 1)$. Ma, per le proprietà dell'operatore aggiunto (v. appendice, sez. 3.1), si ha che

$$\text{Im } \mathcal{D}_G = (\text{Ker } \mathcal{D}_G^*)^\perp = \langle u \rangle^\perp = \left\{ f \in \mathcal{F}(G) \mid \sum_{v \in V} f(v) = 0 \right\};$$

in particolare, essendo $\dim \langle u \rangle = 1$, ritroviamo il risultato del teorema 4, cioè $\text{rg } \mathcal{D}_G = n - 1$. Dualmente, vale

$$\text{Im } \mathcal{D}_G^* = (\text{Ker } \mathcal{D}_G)^\perp,$$

cioè, per ogni $h \in \mathcal{H}(G)$ vale l'equivalenza

$$\begin{aligned} \exists f \in \mathcal{F}(G) \text{ t.c. } h(e) = f(e') - f(e''), \forall e \in E(G) \\ \iff \\ \sum_{e \sim v} (-1)^{e,v} h(e) = 0, \forall v \in V(G) \end{aligned}$$

Nel seguito, quando non siano possibili equivoci su quale grafo stiamo considerando, scriveremo semplicemente $\mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{L}, \mathcal{D}$, ecc., invece di $\mathcal{F}(G), \mathcal{H}(G), \mathcal{A}_G, \mathcal{B}_G, \mathcal{D}_G$ ecc.

A partire dall'operatore d'incidenza $\mathcal{D} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{F}$ si possono definire due operatori simmetrici: l'*operatore laplaciano*

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D} \circ \mathcal{D}^* : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$$

e l'*operatore di cobordo*

$$\mathcal{A}^L = \mathcal{A}_G^L = \mathcal{D}^* \circ \mathcal{D} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

Tali operatori sono strettamente collegati fra loro. In particolare (v. appendice, sez. 3.1), valgono le seguenti proprietà:

1. \mathcal{L} e \mathcal{A}^L hanno gli stessi autovalori non nulli, con le stesse molteplicità. Inoltre, se $\lambda \neq 0$ è uno di tali autovalori comuni, detti $V_\lambda \subset \mathcal{F}$ e $W_\lambda \subset \mathcal{H}$ gli autospazi associati (per gli operatori \mathcal{L} e \mathcal{A}^L , rispettivamente), valgono le relazioni

$$V_\lambda = \mathcal{D}(W_\lambda), \quad W_\lambda = \mathcal{D}^*(V_\lambda)$$

2. Valgono le relazioni

$$\text{Ker } \mathcal{A}^L = \text{Ker } \mathcal{D} = (\text{Im } \mathcal{D}^*)^\perp; \quad \text{Im } \mathcal{A}^L = \text{Im } \mathcal{D}^* = (\text{Ker } \mathcal{D})^\perp$$

$$\text{Ker } \mathcal{L} = \text{Ker } \mathcal{D}^* = (\text{Im } \mathcal{D})^\perp; \quad \text{Im } \mathcal{L} = \text{Im } \mathcal{D} = (\text{Ker } \mathcal{D}^*)^\perp;$$

in particolare,

$$(\text{Ker } \mathcal{A}^L)^\perp = (\text{Im } \mathcal{A}^L)^\perp, \quad \text{Ker } \mathcal{L} = (\text{Im } \mathcal{L})^\perp,$$

in accordo col fatto che \mathcal{L} e \mathcal{A}^L sono simmetrici.

Notiamo che dalle precedenti relazioni e dal teorema 4 segue che

$$\text{rg } \mathcal{A}^L = \text{rg } \mathcal{D}^* = \text{rg } \mathcal{D} = \text{rg } \mathcal{L} = n - \text{numero componenti connesse di } G$$

Calcoliamo esplicitamente i valori di \mathcal{L} e \mathcal{A}^L . Per il laplaciano, si ha, tenendo conto delle (19) e (23),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(v) &= \mathcal{D}(\mathcal{D}^*(f))(v) = \sum_{e \sim v} (-1)^{e,v} \mathcal{D}^*(f)(e) = \sum_{e \sim v} (-1)^{e,v} (f(e') - f(e'')) \\ &= \sum_{e'=v} (f(v) - f(e'')) - \sum_{e''=v} (f(e') - f(v)) = d(v)f(v) - \sum_{V \ni w \sim v} f(w), \end{aligned}$$

per ogni $f \in \mathcal{F}, v \in V$; in altri termini, ricordando la (14), vale

$$\mathcal{L} = \Delta - \mathcal{A},$$

dove $\Delta \in \text{End}(\mathcal{F})$ è l'operatore diagonale definito da

$$\Delta(f)(v) = d(f)f(v),$$

per ogni $f \in \mathcal{F}, v \in V$, e rappresentato nella base standard (χ_i) di \mathcal{F} dalla matrice diagonale $\|\delta_{ij}d(v_i)\|$.

Quanto all'operatore di cobordo, vale, per ogni $h \in \mathcal{H}, e \in E$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^L(h)(e) &= \mathcal{D}^*(\mathcal{D}(h))(e) = \mathcal{D}(h)(e') - \mathcal{D}(h)(e'') = \sum_{\varepsilon \sim e'} (-1)^{\varepsilon, e'} h(\varepsilon) - \sum_{\varepsilon \sim e''} (-1)^{\varepsilon, e''} h(\varepsilon) \\ &= \sum_{\varepsilon \sim e} (-1)^{\varepsilon, e} h(\varepsilon) + 2h(e), \end{aligned} \tag{24}$$

dove

$$(-1)^{\varepsilon, e} = \begin{cases} 1 & \text{se } \varepsilon'' = e'' \text{ oppure } \varepsilon' = e' \\ -1 & \text{se } \varepsilon'' = e' \text{ oppure } \varepsilon' = e'' ; \\ 0 & \text{se } \varepsilon = e \text{ oppure } \varepsilon \approx e \end{cases}$$

in altri termini, $\mathcal{A}^L(h)(e)$ è uguale alla somma dei valori di h sui lati incidenti con e , presi col segno $+$ o $-$ a secondo che tali lati siano concordi o discordi con e (rispetto all'orientazione arbitrariamente fissata su G); si può quindi vedere \mathcal{A}^L come una sorta di operatore di adiacenza "orientata" per il grafo lineare $L(G)$. Evidentemente, la matrice di \mathcal{A}^L nella base standard di \mathcal{H} è

$$A^L = \|(-1)^{e_j, e_s}\| + 2I_m = D^T D$$

A QUESTO PUNTO, COMINCIA LA PARTE DEL PROGRAMMA CHE DOVETE STUDIARE DAL BIGGS. Qui di seguito, riporto la lista degli argomenti da studiare, con alcuni commenti e l'indicazione delle parti del libro di Biggs ("Algebraic Graph Theory", 2^a ed.) su cui trovare tali argomenti. (le pagine del Biggs che NON dovete studiare le ho barrate con una croce)

- *Algebra d'adiacenza* di un grafo e sua applicazione per valutare il diametro del grafo. Sul Biggs trovate l'argomento a pag. 9
- *Spazio dei cicli e spazio dei tagli.* Come abbiamo visto a lezione, lo spazio dei cicli è il nucleo dell'operatore d'incidenza orientata $\mathcal{D} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{F}$, mentre lo spazio dei tagli è l'immagine dell'operatore di cobordo $\mathcal{D}^* : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}$, cioè

$$Cycle(G) = Ker \mathcal{D}$$

$$Cut(G) = Im \mathcal{D}^* = (Ker \mathcal{D})^\perp$$

Per quanto detto prima, nel caso di grafo connesso, vale

$$\dim Cycle(G) = m - rg \mathcal{D} = m - n + 1$$

$$\dim Cut(G) = n - 1$$

A lezione abbiamo mostrato esempi tipici di elementi di $Cycle(G)$ e di $Cut(G)$; abbiamo inoltre mostrato come costruire, a partire da un albero generatore di G , una base di $Cycle(G)$ e una di $Cut(G)$. Questi argomenti corrispondono alla proposizione 4.7 (pag. 26) e al teorema 5.2 (pag. 32) del Biggs.

- *Teorema di Kirchoff e formula di Cayley.* Il teorema di Kirchoff (o anche "matrix-tree theorem") afferma che il numero di alberi generatori di un grafo è pari a un qualunque elemento della matriceaggiugata della matrice laplaciana del grafo (per la definizione e le proprietà della matriceaggiugata, v. sezione 3.3 alla fine di queste note). La formula di Cayley, caso particolare del teorema di Kirchoff, asserisce che il numero di alberi che si possono costruire su n vertici è pari a n^{n-2} . Sul Biggs, il teorema di Kirchoff è il teorema 6.3 (pag. 39); per la dimostrazione di tale teorema sono necessari alcuni lemmi preliminari (le proposizioni 5.3 e 5.4 a pag.32, e il lemma 6.2 a pag.38), più la di Cauchy-Binet per il calcolo del determinante di un prodotto di matrici rettangolari (in classe ho dato la dimostrazione, ma non è necessario che la sappiate all'esame, mi basta che sappiate l'enunciato: lo trovate, ad esempio, su wikipedia, all'indirizzo http://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy-Binet_formula). Una variante del teorema di Kirchoff è la prima formula del corollario 6.5 del Biggs, che abbiamo dimostrato a lezione, e che quindi è in programma. Quanto alla formula di Cayley, sul Biggs si dice che si ottiene "con una semplice manipolazione del determinante di $nI - J$ "; come abbiamo visto a lezione, non è esattamente così, comunque ora non ho tempo di scrivere la dimostrazione (lo farò per gli appelli a partire da quello di febbraio, i candidati di gennaio sono ringraziati...). Ultima avvertenza: ci sono delle differenze di notazione fra le presenti note e il Biggs. Per esempio:

$$\begin{array}{l} \text{Io} \quad G \quad \mathcal{F} \quad \mathcal{H} \quad \mathcal{L} \\ \text{Biggs} \quad \Gamma \quad C_0(\Gamma) \quad C_1(\Gamma) \quad Q, \text{ ecc...} \end{array}$$

1.4 Spazio dei cicli e spazio dei tagli

2 Applicazioni alla teoria dei grafi

In questa sezione daremo alcuni semplici esempi dell'utilità della matrice d'adiacenza, e delle altre matrici ad essa legate, per lo studio delle proprietà dei grafi.

2.1 Numero di passeggiate fra due vertici

Sia $G = (V, E)$ il solito grafo (semplice e non orientato). Sia $V = (v_1, \dots, v_n)$ e sia $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,\dots,n}$ la matrice d'adiacenza di G . Vale il seguente risultato.

Theorem 5 *Il numero $r_{ij}^k(G)$ di passeggiate di lunghezza $k \in \mathbb{N}$ fra i vertici v_i e v_j è uguale a $a_{ij}^{(k)}$, dove $A^k = \|a_{ij}^{(k)}\|$ è la k -ma potenza di A*

Proof. La dimostrazione si fa per induzione su k . Supponiamo, dunque, l'enunciato vero per le passeggiate di lunghezza $k - 1$. Ogni passeggiata di lunghezza k fra v_i e v_j si ottiene da una passeggiata di lunghezza $k - 1$ fra v_i e un vertice v_s adiacente a v_j aggiungendo l'ultimo lato $v_s v_j$. Quindi, le k -passeggiate da v_i a v_j sono in numero di

$$r_{ij}^k(G) = \sum_{v_s \sim v_j} r_{is}^{k-1},$$

cioè, tenendo conto dell'ipotesi d'induzione (e del fatto che a_{si} è pari a 1 se $v_s \sim v_i$ e a 0 in caso contrario),

$$r_{ij}^k(G) = \sum_{v_s \sim v_j} a_{is}^{(k-1)} a_{sj} = \sum_{s=1}^n a_{is}^{(k-1)} a_{sj} = a_{ij}^{(k)},$$

come volevasi dimostrare. ■

Un modo alternativo per calcolare r_{ij}^k per k grande, senza dover calcolare tutte le potenze di A , è quello di sviluppare in serie di potenze (formale) la matrice

$$N = (I - tA)^{-1} = I + tA + t^2A^2 + \dots;$$

in effetti,

$$N_{ij} = \delta_{ij} + a_{ij}t + a_{ij}^{(2)}t^2 + \dots,$$

per cui

$$a_{ij}^{(k)} = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k N_{ij}}{dt^k} \right|_{t=0}$$

Notiamo che questo procedimento di calcolo delle potenze di A , che a prima vista può sembrare molto più conveniente del calcolo diretto, in realtà presenta spesso la stessa complessità computazionale. Infatti, le entrate della matrice $N = N(t)$ sono funzioni razionali della t , generalmente molto complicate, e di queste bisogna poi calcolare le derivate fino alla k -ma; soltanto allora si potrà porre $t = 0$!

A volte non importa tanto conoscere le potenze di A , quanto certe loro caratteristiche numeriche. Per esempio, se (come nel teorema 6) si è interessati solo alla traccia di A^k , allora torna molto utile il fatto che essa è uguale alla somma degli autovalori di A^k , e che questi ultimi sono semplicemente le k -me potenze degli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ di A :

$$tr A^k = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k; \tag{25}$$

sarà quindi sufficiente calcolare, una volta per tutte, gli autovalori di A e applicare la (25) per qualsiasi valore di k che ci interessi (questa procedura è applicata in uno degli Esercizi di teoria dei Grafi che trovate sulla mia pagina web dipartimentale). Notiamo che $tr A^k$ deve essere un numero intero (perchè le entrate di A , e quindi quelle di ogni sua potenza, sono interi); quindi, anche se calcoliamo gli autovalori di A con metodi numerici (cosa indispensabile se il numero di vertici del grafo è abbastanza alto), il risultato della (25) sarà un numero "molto prossimo" a un certo numero intero (purchè i λ_i siano calcolati con un'approssimazione decente, s'intende...): quel numero intero è il valore *esatto* di $tr A^k$.

Come applicazione del teorema precedente diamo delle formule per calcolare il numero di triangoli, quadrangoli e pentagoni contenuti in un grafo (per "k-gono" di G intendo un sottografo di G che corrisponda a un k -ciclo)

Theorem 6 Sia $G = (V, E)$ un grafo, e siano $A = \|a_{ij}\|$ la sua matrice d'adiacenza (relativa a un ordinamento arbitrariamente fissato in V), con autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, e $\Delta = \|d_i \delta_{ij}\|$ la matrice dei gradi dei vertici. Indichiamo con b_k il numero di k -cicli contenuti in G ; allora:

1. Il numero di triangoli in G è pari a

$$b_3 = \frac{1}{6} \text{tr} A^3 = \frac{1}{6} \sum_i \lambda_i^3; \quad (26)$$

2. Il numero di quadrangoli in G è

$$b_4 = \frac{1}{8} \text{tr}(A^4 - 2\Delta^2) = \frac{1}{8} \sum_i \lambda_i^4 - \frac{1}{4} \sum_i d_i^2 \quad (27)$$

3. Il numero di pentagoni è

$$\begin{aligned} b_5 &= \frac{1}{10} \text{tr} (A^5 - 5A^3 \Delta + 5A^3) \\ &= \frac{1}{10} \text{tr}(A^5 + 5(I - \Delta)A^3) \\ &= \frac{1}{10} \sum_i \lambda_i^5 + \frac{1}{2} \sum_i \lambda_i^3 - \frac{1}{2} \sum_i d_i a_{ii}^{(3)} \end{aligned} \quad (28)$$

Proof. Cominciamo col dimostrare la (26). In effetti, fissato $v_i \in V$, ad ogni triangolo $T \subset G$ passante per v_i corrispondono due 3-passeggiate distinte con inizio e fine in v_i , una per ogni orientazione di T . Quindi, per il teorema precedente, il numero di triangoli contenenti v_i è pari a $\frac{1}{2} a_{ii}^{(3)}$. D'altra parte, ogni triangolo passa per tre vertici; quindi, in definitiva,

$$b_3 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n |\{\text{triangoli contenenti } v_i\}| = \frac{1}{3} \frac{1}{2} \sum_i a_{ii}^{(3)},$$

cioè la (26).

Dimostriamo ora la (27). Contrariamente al caso precedente, il "sostegno" di una passeggiata chiusa di lunghezza 4 non è necessariamente un quadrangolo (cioè, un 4-ciclo). Precisamente, fissato un vertice $v_i \in V$, sono possibili, i tre casi seguenti:

- a) passeggiata del tipo $v_i w z w v_i$, con $w \sim v_i$ e $v_i \neq z \sim w$;
- b) passeggiata del tipo $v_i w v_i z v_i$, con $w \sim v_i, z \sim v_i$;
- c) passeggiata su un 4-ciclo con inizio e fine in v_i .

Noi siamo interessati alle passeggiate di tipo c); per calcolarne il numero basterà sottrarre dal numero totale di 4-passeggiate con inizio-fine v_i le passeggiate dei tipi a) e b). Ma, per il teorema precedente, il totale di passeggiate è $a_{ii}^{(4)}$. Inoltre è facile convincersi che

$$\text{numero passeggiate di tipo a)} = \sum_{w \sim v_i} d(w) = \sum_{j=1}^n a_{ij} d_j$$

(quando $v_j \approx v_i$ il termine corrispondente nell'ultima sommatoria è nullo), mentre

num. passeggiate di tipo b) = num. coppie ordinate di vertici adiacenti a $v_i = d_i^2$

quindi,

$$\text{passeggiate di tipo c)} = a_{ii}^{(4)} - d_i^2 - \sum_{j=1}^n a_{ij} d_j,$$

e tenendo conto che ogni 4-ciclo con inizio-fine in v_i corrisponde a 2 passeggiate di tipo c) otteniamo

$$\text{numero quadrilateri contenenti } v_i = \frac{1}{2} (a_{ii}^{(4)} - d_i^2 - \sum_{j=1}^n a_{ij} d_j) \quad (29)$$

Per ottenere il numero totale di quadrilateri in G bisogna, evidentemente, sommare la (29) su tutti i vertici e *dividere il risultato per 4* (perchè ogni quadrilatero passa per 4 vertici!):

$$b_4 = \frac{1}{4} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a_{ii}^{(4)} - d_i^2 - \sum_{j=1}^n a_{ij} d_j) = \frac{1}{8} [\text{tr}(A^4 - \Delta^2) - \sum_{j=1}^n d_j (\sum_{i=1}^n a_{ij})],$$

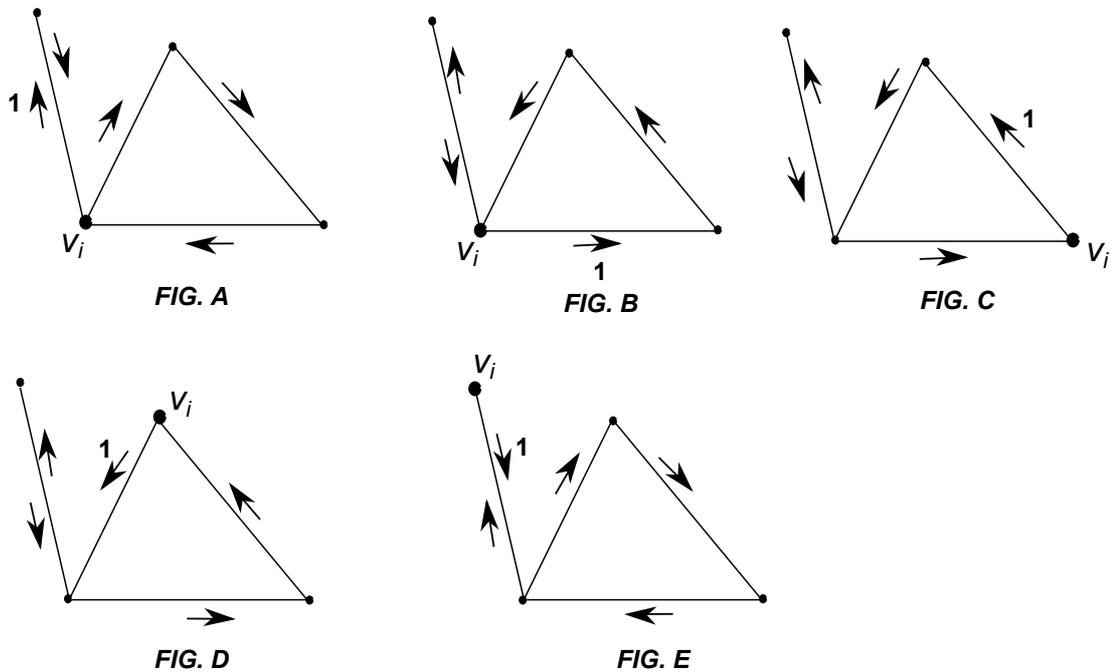
ed essendo $\sum_i a_{ij} = d_j$, si ottiene proprio la (27).

Passiamo alla dimostrazione della (28). Il procedimento è analogo ai due casi precedenti: prima si calcola il numero b_5^i di 5-passeggiate cicliche con

inizio-fine in un vertice fissato e poi si somma su tutti i vertici, dividendo il risultato per 10 (in quanto ogni 5-ciclo, passando per 5 vertici e avendo 2 versi di percorrenza, compare nella somma $5 \times 2 = 10$ volte). Fissiamo, dunque, un vertice $v_i \in V$. Come nel caso dei triangoli e dei quadrangoli, per calcolare b_5^i conviene determinare il numero δ_5^i di 5-passeggiate $v_i * * * v_i$ degeneri (cioè, non su pentagoni) e sottrarlo al numero totale, $a_{ii}^{(5)}$ di 5-passeggiate chiuse per v_i :

$$b_5^i = a_{ii}^{(5)} - \delta_5^i \quad (30)$$

Come c'è da aspettarsi, la casistica delle passeggiate degeneri è più complicata di quella per i 3- e i 4-cicli. In effetti possiamo distinguere i seguenti casi rappresentati in figura:



Come si vede, in tutti i casi A,...,E il sostegno della passeggiata è l'unione di un triangolo T e di un lato l uscente da uno dei vertici di T (in figura abbiamo indicato per i 5 casi il vertice iniziale v_i e il verso della passeggiata). Notiamo che le passeggiate dei tipi A, B si ottengono le une dalle altre semplicemente invertendo il verso di percorrenza, per cui sarà sufficiente calcolare il numero di passeggiate A per avere anche quello di passeggiate B; discorso analogo vale per i tipi C, D. Osserviamo ancora che di tutti e 5 casi esiste una versione,

diciamo, "doppiamente degeneri" in cui $l \in T$; contiamo dapprima queste passeggiate doppiamente degeneri. Se $T = v_i v_j v_h$, allora i casi doppiamente degeneri associati a T sono cinque:

$$v_i v_j v_i v_j v_h v_i, \quad v_i v_j v_h v_j v_h v_i, \quad v_i v_j v_h v_i v_h v_i, \quad v_i v_j v_h v_i v_j v_i, \quad v_i v_h v_i v_j v_h v_i; \quad (31)$$

dunque, ad ognuno degli $a_{ii}^{(3)}$ triangoli (orientati) passanti per v_i corrispondono 5 passeggiate (chiuse di lunghezza 5) doppiamente degeneri, per cui il numero totale di tali passeggiate è

$$\rho_i^5 = 4a_{ii}^{(3)} \quad (32)$$

Calcoliamo il numero σ_i^5 delle passeggiate "semplicemente degeneri" (quelle rappresentate in figura). Cominciamo dal caso A, che consiste nel percorrere avanti e indietro un lato incidente con v_i e poi fare una 3-passeggiata $v_i * * v_i$. Essendo i due tratti, quello rettilineo e quello triangolare, indipendenti fra loro, si ha (sempre ricordando il teor. 5 e quanto detto prima sui tipi A e B):

$$|\{5\text{-pass. deg. tipo A}\}| = |\{5\text{-pass. deg. tipo B}\}| = d_i a_{ii}^{(3)}; \quad (33)$$

per non contare due volte le passeggiate doppiamente degeneri, bisogna sottrarre da (33) quelle doppiamente degeneri di tipo A, e poichè ad ogni triangolo orientato $v_i v_j v_h$ corrispondono 2 passeggiate di questo tipo (la prima e la quarta delle (31)) si ha che

$$|\{5\text{-pass. sempl. deg. tipo A}\}| = |\{5\text{-pass. sempl. deg. tipo B}\}| = (d_i - 2) a_{ii}^{(3)}; \quad (34)$$

Passando alle passeggiate C, ognuna di esse è individuata dalla scelta arbitraria di un v_j adiacente a v_i , di una 2-passeggiata $v_i * v_j$ (o, equivalentemente, un triangolo orientato $T = v_i * v_j v_i$) e di un lato l incidente a v_j ; quindi, sempre per il teor. 5 (e ricordando che $a_{ij} = 0$ se v_j non è adiacente a v_i)

$$\begin{aligned} & |\{5\text{-passeggiate degeneri di tipo C}\}| \\ &= |\{5\text{-passeggiate degeneri di tipo D}\}| \quad (35) \\ &= \sum_{v_j \sim v_i} a_{ij}^{(2)} d_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{ij}^{(2)} d_j; \end{aligned}$$

anche in questo caso, bisogna sottrarre da tale quantità il numero di passeggiate doppiamente degeneri di tipo C; stavolta, ad ogni triangolo $T = v_i v_k v_j v_i$ corrispondono due 5-passeggiate doppiamente degeneri di tipo C ($v_i v_k v_j v_k v_j v_i$, $v_i v_k v_j v_i v_j v_i$), per cui

$$\begin{aligned} & |\{5\text{-pass. sempl. deg. tipo C}\}| \\ &= |\{5\text{-pass. sempl. deg. tipo D}\}| \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{ij}^{(2)} (d_j - 2); \end{aligned} \quad (36)$$

Restano da calcolare le passeggiate di tipo E. Queste sono della forma $v_i v_j v_h v_k v_j v_i$, con $v_j \sim v_i$ e $T = v_j v_h v_k v_j$ triangolo orientato passante per v_j ; quindi

$$|\{5\text{-pass. deg. di tipo E}\}| = \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{jj}^{(3)},$$

quantità alla quale, come al solito, bisogna sottrarre le passeggiate doppiamente degeneri, che sono due (una opposta dell'altra) per ogni scelta di $v_j \sim v_i$ e di una 2-passeggiata $v_j v_h v_i$ (precisamente, sono $v_i v_j v_h v_h v_j v_i$ e $v_i v_j v_i v_h v_j v_i$); quindi,

$$|\{5\text{-pass. sempl. degen. di tipo E}\}| = \sum_{j=1}^n a_{ij} (a_{jj}^{(3)} - 2a_{ij}^{(2)}) \quad (37)$$

Mettendo insieme le formule (32), (34), (36), (37), siamo finalmente in grado di calcolare il numero di 5-passeggiate degeneri con inizio e fine nel vertice v_i :

$$\begin{aligned} \delta_5^i &= |\{5\text{-pass. sempl. deg.}\}| + |\{5\text{-pass. dopp. deg.}\}| \\ &= 5a_{ii}^{(3)} + |\{5\text{-pass. sempl. deg tipi A...E}\}| \\ &= 5a_{ii}^{(3)} + 2(d_i - 2)a_{ii}^{(3)} + 2 \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{ij}^{(2)} (d_j - 2) + \sum_{j=1}^n a_{ij} (a_{jj}^{(3)} - 2a_{ij}^{(2)}) \quad (38) \\ &= -5a_{ii}^{(3)} + 2d_i a_{ii}^{(3)} + 2 \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{ij}^{(2)} d_j + \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{jj}^{(3)} \end{aligned}$$

Dalla (30) e da quanto detto precedentemente segue:

$$b_5 = \frac{1}{10} \sum_i b_i^5 = \frac{1}{10} (\text{tr} A^5 - \sum_i \delta_5^i); \quad (39)$$

ma da (38) segue

$$\begin{aligned}
\sum_i \delta_5^i &= -5Tr(A^3) + 2 \sum_i a_{ii}^{(3)} + 2 \sum_{i,j} a_{ij} a_{ij}^{(2)} d_j + \sum_{i,j} a_{ij} a_{jj}^{(3)} \\
&= -5tr(A^3) + 2 \sum_j d_j a_{jj}^{(3)} + \sum_j a_{jj}^{(3)} d_j + \sum_j a_{jj}^{(3)} d_j \\
&= -5tr(A^3) + 5tr(\Delta A^3);
\end{aligned}$$

per cui dalla (39) segue la (28). ■

Osservazione. In linea di principio, si possono trovare formule analoghe a (26), (27), (28) per calcolare il numero di k -cicli in un grafo, per ogni $k < |V|$. Ma, come ci si può facilmente convincere (e come si è effettivamente visto nella dimostrazione precedente quando si è passati da $k = 4$ a $k = 5$), al crescere di k aumenta rapidissimamente la difficoltà di classificare tutte le k -passeggiate "degeneri" (cioè, che non si svolgono su k -cicli).

2.2 Pullback di un omomorfismo fra grafi

Siano $G = (V, E), G' = (V', E')$ due grafi (semplici non orientati), $V = \{v_1, \dots, v_n\}, V' = \{z_1, \dots, z_\nu\}$. Siano \mathcal{F} l'algebra delle funzioni reali definite su V ed \mathcal{F}' l'analoga algebra delle funzioni su V' ; come già abbiamo visto, questi due spazi vettoriali hanno dimensione, rispettivamente, n e ν . Indichiamo con $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonica di \mathcal{F} e $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\nu)$ la base canonica di \mathcal{F}' , cioè:

$$e_i(v_r) = \delta_{ir}, \quad i, r = 1, \dots, n$$

$$\varepsilon_j(z_s) = \delta_{js}, \quad j, s = 1, \dots, \nu$$

Siano $\mathcal{A} \in \text{End}(\mathcal{F}), \mathcal{A}' \in \text{End}(\mathcal{F}')$ gli operatori d'adiacenza dei due grafi (v. sezione 1.3), e siano $A = \|a_{ir}\|_{i,r=1,\dots,n}$ e $A' = \|a'_{js}\|_{j,s=1,\dots,\nu}$ le corrispondenti matrici d'adiacenza, definite da

$$a_{ir} = \mathcal{A}(e_i)(v_r), \quad a'_{js} = \mathcal{A}'(\varepsilon_j)(z_s)$$

Sia

$$F : V \rightarrow V'$$

una qualsiasi applicazione (non necessariamente un omomorfismo di grafi), ad essa si può associare l'omomorfismo di \mathbb{R} -algebre

$$F^* : \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F},$$

detto *pullback* di F , definito da

$$F^*(h) \stackrel{\text{def}}{=} h \circ F,$$

per ogni $h \in \mathcal{F}'$. Essendo, in particolare, un'applicazione lineare fra spazi vettoriali, F^* sarà rappresentato, rispetto alle basi standard \mathcal{B}' , \mathcal{B} dalla matrice $n \times \nu$:

$$C = \|c_{ij}\|,$$

definita da

$$F^*(\varepsilon_j) = \sum_i c_{ij} e_i$$

(d'ora in poi, per semplicità, sottintenderemo che gli indici i ed r varino fra 1 ed n , mentre gli indici j ed s varieranno da 1 a ν). E' chiaro che C è un modo ridondante di rappresentare F^* , in quanto questa è determinata da F , per assegnare la quale basta un'applicazione $\phi : \hat{n} \rightarrow \hat{\nu}$, ($\hat{n} = \{1, \dots, n\}$, $\hat{\nu} = \{1, \dots, \nu\}$):

$$F(v_i) = z_{\phi(i)}; \tag{40}$$

in effetti, la i -ma riga di C è costituita da elementi tutti nulli, tranne quello di posto $j = \phi(i)$ che è uguale a 1:

$$c_{ij} = F^*(\varepsilon_j)(v_i) = \varepsilon_j(F(v_i)) = \varepsilon_j(z_{\phi(i)}) = \delta_{j, \phi(i)} \tag{41}$$

Quanto detto finora vale per *qualsiasi* applicazione $F : V \rightarrow V'$. Ci chiediamo, ora: che caratteristiche peculiari possiede F^* quando F è un omomorfismo fra grafi (cioè, conserva la relazione d'adiacenza fra vertici)? E' chiaro che la risposta va cercata nelle relazioni che intercorrono fra F^* e gli operatori d'adiacenza dei due grafi o, equivalentemente, fra le matrici C , A , A' dei tre operatori lineari. Precisamente, la condizione d'omomorfismo:

$$v_i \sim v_r \implies F(v_i) \sim F(v_r)$$

si traduce, tenendo conto della (40) e della definizione delle matrici d'adiacenza, in

$$a_{ir} = 1 \implies a'_{\phi(i)\phi(r)} = 1, \quad (42)$$

per ogni i, r da 1 a n . D'altra parte, vale

$$A'_F = CA'CT, \quad (43)$$

con $A'_F = \left\| a'_{\phi(i)\phi(r)} \right\|$; infatti, applicando la (41), si ha:

$$(CA'CT)_{ir} = \sum_{j,s} c_{ij} a'_{js} c_{rs} = \sum_{j,s} \delta_{j,\phi(i)} a'_{js} \delta_{s,\phi(r)} = a'_{\phi(i),\phi(r)},$$

cioè la (43). Quindi, tenendo conto che tanto A quanto A_F hanno tutti gli elementi pari a 1 o 0, la (42) si sintetizza così: F è un omomorfismo fra i grafi G e G' se e solo se vale:

$$A'_F \geq A, \quad (44)$$

la disuguaglianza essendo intesa componente per componente. Notiamo che

$$(A'_F)_{ir} = \begin{cases} 1 & \text{se } F(v_i) \sim F(v_r) \\ 0 & \text{se } F(v_i) \not\sim F(v_r) \end{cases}$$

Per comodità del lettore, riportiamo alcune altre semplici identità, di cui lasciamo la facile verifica:

$$(AC)_{ij} = |V_i \cap F^{-1}(z_j)|, \quad \text{con } V_i = \{v \in V, v \sim v_i\}$$

$$(CA')_{ij} = a'_{\phi(i),j}$$

$$(CC^T)_{ir} = \delta_{\phi(i),\phi(r)}$$

$$(ACA')_{ij} = |V_i \cap F^{-1}(Z_j)|, \quad \text{con } Z_j = \{z \in V', z \sim z_j\}$$

[continua, fai notare che la condizione matriciale (44) si implementa facilmente su computer e consente di studiare gli omomorfismi fra i due grafi in modo sistematico, magari svolgi un esempio che convinca lo studente di questo fatto]

3 Appendice d'algebra lineare

In quest'appendice ricordiamo alcune nozioni d'algebra lineare, non sempre impartite nei corsi istituzionali, che abbiamo utilizzato in precedenza per lo studio dei grafi.

3.1 Operatore aggiunto

Prima di esporre le principali proprietà dell'operatore aggiunto ricordiamo il seguente risultato, valido per operatori lineari fra spazi vettoriali qualsiasi.

Theorem 7 *Siano V^n, W^m due spazi vettoriali sullo stesso campo \mathbb{K} , e siano $F : V \rightarrow W, G : W \rightarrow V$ due operatori lineari. Allora gli endomorfismi $G \circ F \in \text{End}(V)$ ed $F \circ G \in \text{End}(W)$ hanno gli stessi autovalori non nulli, con le stesse molteplicità geometriche. Inoltre, se $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ è uno di tali autovalori comuni, i corrispondenti autospazi $V_\lambda^{G \circ F} \subset V, V_\lambda^{F \circ G} \subset W$ sono legati dalle relazioni*

$$V_\lambda^{F \circ G} = F(V_\lambda^{G \circ F}), \quad V_\lambda^{G \circ F} = G(V_\lambda^{F \circ G}) \quad (45)$$

Proof. Sia $\lambda \neq 0$ un autovalore di $G \circ F$, cioè esiste un $z \in V \setminus \{0\}$ tale che

$$G(F(z)) = \lambda z, \quad (46)$$

da cui segue, in particolare, che $F(z) \neq 0$ (altrimenti il secondo membro di (46) sarebbe nullo); dunque, $V_\lambda^{G \circ F} \cap \text{Ker} F = \{0\}$, sicchè

$$\dim F(V_\lambda^{G \circ F}) = \dim V_\lambda^{G \circ F} \quad (47)$$

Applicando l'operatore F a entrambi i membri di (46) si ottiene

$$F(G(w)) = \lambda w,$$

con $w = F(z) \neq 0$, cioè λ è un autovalore anche di $F \circ G$ e vale l'inclusione

$$F(V_\lambda^{G \circ F}) \subset V_\lambda^{F \circ G}, \quad (48)$$

(in quanto il vettore z della (46) è un generico elemento non nullo di $V_\lambda^{G \circ F}$); analogamente, scambiando F e G nel ragionamento precedente, si ottiene

$$G(V_\lambda^{F \circ G}) \subset V_\lambda^{G \circ F} \quad (49)$$

ed inoltre, sempre scambiando i ruoli dei due operatori, vale

$$\dim G(V_\lambda^{F \circ G}) = \dim V_\lambda^{F \circ G}, \quad (50)$$

analoga di (47). Mettendo assieme le (47), (50) e le inclusioni (48),(49) si ricava

$$\dim V_\lambda^{G \circ F} = \dim F(V_\lambda^{G \circ F}) \leq \dim V_\lambda^{F \circ G} = \dim G(V_\lambda^{F \circ G}) \leq \dim V_\lambda^{G \circ F},$$

da cui segue che in realtà le diseuguaglianze sono uguaglianze e vale, quindi, la (45)₁ (e quindi la (45)₂, scambiando i ruoli di F e G). ■

Passiamo ora allo studio dell'operatore aggiunto. Siano V^n, W^m due spazi vettoriali euclidei, e sia $F : V \rightarrow W$ un operatore lineare. L'*aggiunto* di F è l'operatore $F^* : W \rightarrow V$ definito dall'identità

$$F^*(w) \cdot v = w \cdot F(v), \quad (51)$$

valida per ogni $v \in V, w \in W$. Per dimostrare la correttezza della definizione, notiamo innanzitutto che F^* , se esiste, è unico. Infatti, se $\tilde{F} : W \rightarrow V$ fosse un altro operatore soddisfacente la (51), cioè tale che $\tilde{F}(w) \cdot v = w \cdot F(v)$, allora sottraendo le due relazioni membro a membro si avrebbe che $(\tilde{F}(w) - F^*(w)) \cdot v = 0$ per ogni $v \in V$, il che implicherebbe $\tilde{F}(w) = F^*(w)$ per ogni w . Resta quindi da dimostrare che F^* esiste e che è lineare. In effetti, fissate due basi ortonormali $B = (e_1, \dots, e_n)$ in V e $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ in W , e detta $A = \|a_{ij}\|_{i=1, \dots, m}^{j=1, \dots, n}$ la matrice di F rispetto a \mathcal{B}, \mathcal{C} , è immediato vedere che l'operatore $\tilde{F} : W \rightarrow V$ rappresentato nelle basi \mathcal{C}, \mathcal{B} dalla matrice trasposta $A^T = \|a_{ji}\|_{j=1, \dots, n}^{i=1, \dots, m}$; infatti,

$$\tilde{F}(\varepsilon_i) \cdot e_j = a_{ji} = \varepsilon_i \cdot F(e_j),$$

cioè \tilde{F} soddisfa la (51) (è bastato limitarsi a verificarla solo sui vettori di base per la linearità di \tilde{F} e di entrambi i membri di (51)), e quindi, per quanto detto prima, $\tilde{F} = F^*$. Dunque, riepilogando: l'applicazione F^* definita dalla (51) è ben definita, lineare e rappresentata, rispetto a due basi ortonormali fissate in V e W , dalla trasposta della matrice di F .

Theorem 8 Sia $F : V \rightarrow W$ un operatore lineare fra due spazi vettoriali euclidei, e sia $F^* : W \rightarrow V$ l'operatore aggiunto. Allora valgono le seguenti proprietà:

a)

$$(F^*)^* = F$$

b) L'immagine e il nucleo di F^* sono dati da

$$\text{Im } F^* = (\text{Ker } F)^\perp \tag{52}$$

$$\text{Ker } F^* = (\text{Im } F)^\perp,$$

(dove Z^\perp indica il complemento ortogonale del sottospazio Z).

c) Gli operatori $F^* \circ F \in \text{End}(V)$, $F \circ F^* \in \text{End}(W)$ sono simmetrici e semidefiniti positivi. Inoltre, un numero reale $\lambda \neq 0$ è autovalore per $F^* \circ F$ se e solo se lo è per $F \circ F^*$, e i corrispondenti autospazi $V_\lambda^{F \circ F^*}$, $V_\lambda^{F^* \circ F}$ sono legati dalla relazione

$$V_\lambda^{F \circ F^*} = F(V_\lambda^{F^* \circ F}), \quad V_\lambda^{F^* \circ F} = F^*(V_\lambda^{F \circ F^*})$$

d) Valgono le relazioni:

$$\text{Im}(F^* \circ F) = \text{Im } F^* = (\text{Ker } F)^\perp, \quad \text{Ker}(F^* \circ F) = \text{Ker } F = (\text{Im } F^*)^\perp \tag{53}$$

$$\text{Im}(F \circ F^*) = \text{Im } F = (\text{Ker } F^*)^\perp, \quad \text{Ker}(F \circ F^*) = \text{Ker } F^* = (\text{Im } F)^\perp;$$

in particolare, sia per $F^* \circ F$ che per $F \circ F^*$ il nucleo e l'immagine sono l'uno il complemento ortogonale dell'altra.

Proof. La proprietà a) segue immediatamente dal fatto che la matrice di F^* è la trasposta di quella di F e che $(A^T)^T = A$. Valendo la a), è sufficiente dimostrare solo una delle (52), per esempio la prima. In effetti, per ogni $w \in W, v \in \text{Ker } F$, vale

$$F^*(w) \cdot v = w \cdot F(v) = 0,$$

cioè $\text{Im } F^* \subset (\text{Ker } F)^\perp$. D'altra parte, essendo $\text{rg } F = \text{rg } F^*$ (perchè la matrice di F^* è la trasposta di quella di F , e quindi ha lo stesso rango), vale

$$\dim \text{Im } F^* = \dim \text{Im } F = n - \dim \text{Ker } F = \dim(\text{Ker } F)^\perp,$$

il che completa la dimostrazione della (52)₁.

Che $F^* \circ F$ sia semidefinito positivo si verifica immediatamente:

$$F^*(F(v)) \cdot v = F(v) \cdot F(v) = \|F(v)\|^2 \geq 0, \quad (54)$$

per ogni $v \in V$; analoga dimostrazione vale per $F \circ F^*$.

Per il punto d), è sufficiente dimostrare le relazioni (53) relative a $F^* \circ F$ (le altre si ottengono da queste scambiando i ruoli di F ed F^* e tenendo conto del punto a)). In realtà, basta dimostrare solo una delle due relazioni, l'altra si dedurrà dal fatto generale che nucleo e immagine di un endomorfismo simmetrico sono sempre l'uno il complemento ortogonale dell'altra¹. Dimostriamo, dunque, la seconda delle (53)₁; un'inclusione è ovvia, quanto all'altra, se $F^*(F(v)) = 0$, allora, come per la (54), si deduce

$$0 = F^*(F(v)) \cdot v = \|F(v)\|^2,$$

cioè $F(v) = 0$. ■

3.2 Valori estremali di forme quadratiche

Sia V^n uno spazio vettoriale euclideo; sia $F \in \text{End}(V)$ un operatore simmetrico (cioè, $F^* = F$) e sia $b = b_F : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica associata:

$$b(v, w) \stackrel{\text{def}}{=} F(v) \cdot w,$$

per ogni $v, w \in V$. Denotata con $q = q_F : V \rightarrow \mathbb{R}$ la forma quadratica

$$q(v) = b(v, v) = F(v) \cdot v,$$

¹In effetti, sia $G \in \text{End}(V)$ un operatore simmetrico ($G = G^*$) dello spazio euclideo V ; allora, per ogni $v \in \text{Ker } G$, $z \in V$ vale $v \cdot G(z) = G(v) \cdot z = 0$, cioè $\text{Ker } G \subset (\text{Im } G)^\perp$; d'altra parte, $\dim \text{Ker } G = n - \dim(\text{Im } G) = \dim(\text{Im } G)^\perp$, per cui deve essere proprio $\text{Ker } G = (\text{Im } G)^\perp$.

vogliamo studiare i punti critici e i corrispondenti valori estremali della restrizione di q alla sfera unitaria $S = \{v \in V \mid v \cdot v = 1\}$. Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si tratta di trovare i punti $v \in S$ in cui

$$dq = \lambda d(v \cdot v) \quad (55)$$

per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$; ma

$$d(v \cdot v) = 2v \cdot dv,$$

mentre

$$dq = d(F(v) \cdot v) = d(F(v)) \cdot v + F(v) \cdot dv$$

Ora, se $A = \|a_{ij}\|$ è la matrice di F in una base ortonormale di V (e quindi $A = A^T$) e $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ sono le componenti di $v \in V$ nella stessa base, si ha (ricordando che)

$$d(F(v)) \cdot v = d(Ax)^T x = (Adx)^T x = dx^T Ax = x^T Adx = F(v) \cdot dv$$

Quindi

$$dq = 2F(v) \cdot dv$$

e la (55) diventa

$$(F(v) - \lambda v) \cdot dv = 0;$$

tale relazione, dovendo valere per ogni "incremento infinitesimo" dv , implica

$$F(v) = \lambda v$$

Dunque: $v \in S$ è critico per $\tilde{q} = q|_S$ se e solo se v è un autovettore di F , e il corrispondente valore critico è

$$\tilde{q}(v) = F(v) \cdot v = \lambda v \cdot v = \lambda,$$

cioè l'autovalore di F associato a v .

3.3 Aggiunto classico di una matrice

Sia $A = \|a_{ij}\|$ una matrice reale $n \times n$; l'*aggiugata* o *aggiunta classica* di A è la matrice

$$adj(A) = \|A_{ji}\|, \quad (56)$$

dove A_{ij} è il complemento algebrico di a_{ij} in A (cioè il determinante della matrice ottenuta da A eliminando la riga i -ma e la colonna j -ma, moltiplicato per $(-1)^{i+j}$). Se A è invertibile, allora, com'è noto,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A^T) = \frac{1}{|A|} \text{adj}(A)^T;$$

in generale (cioè, per ogni A , anche se non invertibile), vale

$$A \cdot \text{adj}(A^T) = \text{adj}(A^T) \cdot A = |A| I, \quad (57)$$

dove $I = I_n$ è la matrice identica d'ordine n . Osserviamo che dalla definizione (56) segue immediatamente:

$$\text{adj}(A^T) = \text{adj}(A)^T$$

La (57) implica che, se $|A| = 0$, allora $\text{Im } A \subset \text{Ker}(\text{adj}(A^T))$, per cui il rango di $\text{adj}(A)$ soddisfa la disuguaglianza

$$\text{rg}(\text{adj}(A)) = \text{rg}(\text{adj}(A)^T) = \text{rg}(\text{adj}(A^T)) \leq n - \text{rg}(A)$$

Quindi, se A ha rango $n - 1$, allora $\text{adj}(A)$ ha rango 1 (non può essere $\text{adj}(A) = 0$, perchè in tal caso tutti i minori d'ordine $n - 1$ di A sarebbero nulli, e quindi A avrebbe rango minore di $n - 1$); se invece A ha rango minore o uguale a $n - 2$, allora (per lo stesso motivo) $\text{adj}(A)$ è nulla.

Il caso che ci interessa (cioè quando A è la matrice laplaciana di un grafo connesso) è quello in cui A è simmetrica semidefinita positiva e di rango $n - 1$. In tal caso, anche $\text{adj}(A)$ è simmetrica e ha rango 1, per cui deve essere della forma

$$A = \lambda J,$$

con $\lambda \neq 0$ e J matrice con tutte le entrate uguali a 1.