Algebra esterna

F. Pugliese

March 17, 2012

Abstract

Diamo una breve esposizione delle principali proprietà del prodotto esterno di forme multilineari alternanti su uno spazio vettoriale.

1 Algebra tensoriale su uno spazio vettoriale

Sia V^n uno spazio vettoriale reale[1] e sia V^* lo spazio duale associato. Le applicazioni multilineari

$$f : V^{*p} \times V^q \to \mathbb{R}$$

si chiamano *tensori* misti di tipo (p, q) su V, o anche tensori p volte covarianti e q volte controvarianti ; il loro insieme, che denotiamo con $T_p^q(V)$, è ovviamente uno spazio vettoriale reale di dimensione n^{p+q}. Ad esempio:

$$T_0^1(V) = V^*,\ T_1^0(V) = (V^*)^* = V,\ T_1^1(V) = End_{\mathbb{R}}(V),$$

ecc. ; l'ultima identificazione è data dall'isomorfismo

$$\begin{array}{ccc} End(V) & \longrightarrow & T_1^1(V) \\ A & \longmapsto & f_A \end{array}$$

definito da

$$f_A(\phi, v) \stackrel{\text{def}}{=} \phi(A(v)),$$

per ogni $\phi \in V^*, v \in V$. Per convenzione, si pone anche $T_0^0(V) = \mathbb{R}$. L'indice p, pari al numero degli argomenti covettoriali di $f \in T_p^q$, è detto *indice di controvarianza*, mentre q, pari al numero di argomenti vettoriali di f, è detto *indice di covarianza.*

La somma diretta

$$T(V) \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{p,q \in \mathbb{N}_0} T_p^q(V)$$

[1] In realtà, buona parte delle definizioni e dei risultati esposti nel seguito vale sia per spazi vettoriali (di dimensione finita) su campi arbitrari, che per alcune importanti classi di moduli su anelli commutativi unitari. Comunque, i casi che più interessano la geometria differenziale sono: a) lo spazio tangente $T_a(M)$ a una varietà liscia M in un punto a; b) il $C^\infty(M)$-modulo $\mathcal{D}(M)$ dei campi vettoriali su una varietà liscia M; in quest'ultimo caso, lo "spazio duale" è il modulo $\Lambda^1(M)$ delle forme differenziali lineari su M.

è dotata di una naturale struttura di $\mathbb{R}$-algebra associativa; precisamente, se $f \in T^q_p(V), g \in T^{q'}_{p'}(V)$, allora il loro *prodotto tensoriale* è il tensore $f \otimes g \in T^{q+q'}_{p+p'}$ definito da

$$f \otimes g(\phi_1, \dots, \phi_{p+p'}, v_1, \dots v_{q+q'}) \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} f(\phi_1, \dots, \phi_p, v_1, \dots v_q) g(\phi_{p+1}, \dots, \phi_{p+p'}, v_{q+1}, \dots v_{q+q'}),$$

per ogni $\phi_1, \dots, \phi_{p+p'} \in V^*, v_1, \dots v_{q+q'} \in V$. E' chiaro dalla definizione che tale prodotto è associativo, ma non commutativo.

Fra i tensori su V giocano un ruolo speciale i tensori simmetrici e quelli antisimmetrici. Precisamente, sia $f \in T^p_0(V)$ un tensore p volte covariante (cioè, una forma multilineare di grado p su V), e sia S_p il gruppo simmetrico d'ordine n (cioè, il gruppo delle $n!$ permutazioni dell'insieme $\{1, \dots, n\}$); ad ogni $\sigma \in S_p$ è associato il tensore f^σ, definito da

$$f^\sigma(v_1, \dots, v_p) \stackrel{\text{def}}{=} f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)});$$

evidentemente, $f \mapsto f^\sigma$ è un'applicazione lineare su $T^p_0(V)$. Si dice che $f \in T^p_0(V)$ è un *tensore simmetrico* d'ordine p quando

$$f^\sigma = f,$$

per ogni $\sigma \in S_p$; in altri termini, i tensori simmetrici sono le forme multilineari simmetriche. Se invece[2]

$$f^\sigma = (-1)^\sigma f$$

per ogni $\sigma \in S_p$, allora f si dice *tensore antisimmetrico* o, più comunemente, *forma esterna* di grado p (in pratica, f è antisimmetrico quando cambia di segno se si scambiano fra loro due dei suoi p argomenti). E' ovvio che tanto l'insieme

$$S^p(V^*) = \{f \in T^p_0(V) \mid f \text{ simmetrico}\}$$

quanto l'insieme

$$\Lambda^p(V^*) = \{f \in T^p_0(V) \mid f \text{ antisimmetrico}\}$$

sono sottospazi di $T^p_0(V)$. D'altra parte, è altrettanto chiaro che nè

$$S(V^*) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}_0} S^p(V^*)$$

nè

$$\Lambda(V^*) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}_0} \Lambda^p(V^*)$$

[2] Il fattore $(-1)^\sigma$ è la parità della permutazione σ, cioè è uguale a 1 se il numero di scambi necessari per riordinare la sequenza $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$ è pari, mentre è uguale a -1 in caso contrario.

sono sottoalgebre di $T(V)$, in quanto non chiusi rispetto al prodotto tensoriale. Tuttavia, in entrambi questi spazi è possibile definire in modo naturale una struttura di $\mathbb{R}$-algebra associativa a partire da quella di $(T(V), \otimes)$, procedendo come segue.

Esaminiamo dapprima $S(V^*)$. Esiste una proiezione naturale $f \mapsto f_{sym}$ di $T_0^p(V)$ su $S^p(V^*)$, definita da

$$f_{sym} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} f^\sigma \tag{1}$$

(il fattore $1/p!$ serve solo a normalizzare la sommatoria); in altri termini, $f_{sym}(v_1, \ldots, v_p)$ è la media dei valori che f assume su tutte le possibili permutazioni degli argomenti $v_1, \ldots, v_p$. Che l'applicazione $f \mapsto f_{sym}$ sia effettivamente una proiezione segue dal fatto che essa è lineare (perchè somma delle trasformazioni lineari $f \mapsto f^\sigma$) ed è idempotente, in quanto, evidentemente,

$$(f_{sym})_{sym} = f_{sym},$$

per ogni $f \in T_0^p(V)$; ovviamente, vale

$$f = f_{sym} \quad \Longleftrightarrow \quad f \in S^p(V^*)$$

f_{sym} si dice *simmetrizzato* o *parte simmetrica* di f.

Analogamente, esiste una mappa naturale $f \mapsto f_{alt}$ di $T_0^p(V)$ su $\Lambda^p(V^*)$, definita da

$$f_{alt} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} (-1)^\sigma f^\sigma; \tag{2}$$

anche in questo caso, $f_{alt}(v_1, \ldots, v_p)$ è la media dei valori assunti da f su tutte le possibili permutazioni degli argomenti, ma i termini corrispondenti a permutazioni dispari compaiono cambiati di segno. La forma f_{alt} si dice *antisimmetrizzato* o *parte antisimmetrica* di F. Anche in questo caso, ricordando le proprietà delle parità di un prodotto di permutazioni, si vede subito che

$$(f_{alt})_{alt} = f_{alt},$$

e che

$$f = f_{alt} \quad \Longleftrightarrow \quad f \in \Lambda^p(V^*)$$

cioè la (2) definisce una proiezione, la cui immagine è $\Lambda^p(V^*)$.

Remark 1 *Notiamo che valgono anche le identità*

$$(f_{alt})_{sym} = (f_{sym})_{alt} = 0,$$

per ogni $f \in T_0^p(V)$. Tuttavia, ciò non implica, in generale, che f sia uguale alla somma delle sue parti simmetrica e antisimmetrica; in effetti,

$$\dim T_0^p(V) = n^p,$$

mentre, come vedremo nel seguito (teoremi 6, 8),

$$\dim S^p(V^*) = \binom{n+p-1}{p}, \quad \dim \Lambda^p(V^*) = \binom{n}{p},$$

e quindi, in generale,

$$\dim T_0^p(V) > \dim S^p(V^*) + \dim \Lambda^p(V^*)$$

Notiamo che, nel caso $p = 2$, si ha

$$\dim T_0^2(V) = \dim S^2(V^*) + \dim \Lambda^2(V^*)$$

e quindi

$$T_0^2(V) = S^2(V^*) \oplus \Lambda^2(V^*),$$

in accordo col fatto, ben noto, che ogni forma bilineare è la somma della sua parte simmetrica e della sua parte antisimmetrica.

Possiamo ora, come promesso, munire sia $S^p(V^*)$ che $\Lambda^p(V^*)$ di una struttura di algebra associativa reale. Precisamente, in $S^p(V^*)$ definiamo il *prodotto simmetrico* $\odot$ tramite la formula

$$f \odot g \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(p+q)!}{p!q!} (f \otimes g)_{sym} = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_p} (f \otimes g)^\sigma, \tag{3}$$

per ogni $f \in S^p(V^*), g \in S^q(V^*)$. Non è difficile verificare, a partire dalla (3) e da (1), che $\odot$ è associativo e commutativo; in effetti, se denotiamo con $\widetilde{f}$ il polinomio omogeneo di grado p in n indeterminate naturalmente associato ad $f \in S^p(V^*)$ (che, come prima osservato, non è altro che una forma p-lineare simmetrica su V), allora si può vedere che

$$\widetilde{f \odot g} = \widetilde{f}\widetilde{g};$$

in altri termini, $(S^P(V^*), \odot)$ è canonicamente isomorfa all'algebra dei polinomi di grado p in $n = \dim V$ incognite: tale algebra è detta *algebra simmetrica* su V.

Example 2 *E' immediato verificare, a partire dalla definizione (1), che*

$$(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_p)_{sym} = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \phi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \phi_{\sigma(p)}, \tag{4}$$

per ogni $\phi_1, \ldots, \phi_p \in V^*$. Dimostriamo ora che

$$\phi_1 \odot \cdots \odot \phi_p = \sum_{\sigma \in S_p} \phi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \phi_{\sigma(p)} = p!(\phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_p)_{sym} \tag{5}$$

La (5) è ovviamente vera per $p = 1$*; supponiamola vera per* $p-1$ *e dimostriamola per* p*. Detto* $\omega = \phi_1 \odot \cdots \odot \phi_{p-1}$ *si ha, per ipotesi d'induzione,*

$$\omega = \sum_{\tau \in S_{p-1}} \phi_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes \phi_{\tau(p-1)};$$

allora, vale

$$\phi_1 \odot \cdots \odot \phi_p = \omega \odot \phi_p = \frac{p!}{(p-1)!}(\omega \otimes \phi_p)_{sym} =$$

$$= p\left(\left(\sum_{\tau \in S_{p-1}} \phi_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes \phi_{\tau(p-1)}\right) \otimes \phi_p\right)_{sym} = p \sum_{\tau \in S_{p-1}} \left(\phi_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes \phi_{\tau(p-1)} \otimes \phi_p\right)_{sym};$$

ma applicando la (4), si ha

$$\left(\phi_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes \phi_{\tau(p-1)} \otimes \phi_p\right)_{sym} = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \phi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \phi_{\sigma(p)},$$

che è indipendente da $\tau \in S_{p-1}$*; quindi, la sommatoria su* τ *è pari a* $(p-1)!$ *questa quantità, cioè:*

$$\phi_1 \odot \cdots \odot \phi_p = \omega \odot \phi_p = p(p-1)!\frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \phi_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \phi_{\sigma(p)},$$

cioè la (5).

Passiamo al caso delle forme esterne. In totale analogia con la definizione (3), possiamo definire su $\Lambda^p(V^*)$ il *prodotto esterno* $\wedge$ tramite la formula

$$\omega \wedge \rho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(p+q)!}{p!q!}(\omega \otimes \rho)_{alt} = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} (-1)^\sigma (\omega \otimes \rho)^\sigma, \qquad (6)$$

per ogni $\omega \in \Lambda^p(V^*), \rho \in \Lambda^q(V^*)$ (d'ora in poi, secondo tradizione, indicheremo le forme esterne con lettere greche). L'algebra $(\Lambda(V^*), \wedge)$ è detta *algebra esterna* o *algebra di Grassmann* su V; come dimostreremo nel seguito, essa è associativa e anticommutativa.

2 Prodotto esterno

2.1 Associatività e anticommutatività del prodotto esterno

L'associatività del prodotto esterno, definito dalla formula (6), segue immediatamente dal prossimo lemma.

Lemma 3 *Siano $\omega \in T_0^p(V), \rho \in T_0^q(V)$; allora vale*

$$(\omega_{alt} \otimes \rho)_{alt} = (\omega \otimes \rho_{alt})_{alt} = (\omega \otimes \rho)_{alt}$$

Proof. In effetti,

$$(\omega_{alt} \otimes \rho)_{alt} = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} (-1)^\sigma (\omega_{alt} \otimes \rho)^\sigma$$

$$= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} (-1)^\sigma \left(\frac{1}{p!} \sum_{\tau \in \Sigma_p} (-1)^\tau \omega^\tau \otimes \rho \right)^\sigma$$

$$= \frac{1}{(p+q)!p!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} (-1)^\sigma \sum_{\tau \in \Sigma_p} (-1)^\tau (\omega^\tau \otimes \rho)^\sigma \tag{7}$$

Ma

$$(\omega^\tau \otimes \rho)^\sigma = (\omega \otimes \rho)^{\sigma \circ \widehat{\tau}},$$

dove $\widehat{\tau} \in \Sigma_{p+q}$ è la naturale estensione di τ, cioè

$$\widehat{\tau}(i) = \begin{cases} \tau(i), & i = 1, \dots, p \\ \\ i, & i = p+1, \dots p+q \end{cases} ;$$

evidentemente, $\widehat{\tau}$ ha la stessa parità di τ, per cui la (7) diventa

$$(\omega_{alt} \otimes \rho)_{alt} = \frac{1}{(p+q)!p!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} \sum_{\tau \in \Sigma_p} (-1)^\sigma (-1)^{\widehat{\tau}} (\omega \otimes \rho)^{\sigma \circ \widehat{\tau}} =$$

$$= \frac{1}{p!} \sum_{\tau \in \Sigma_p} \left[\frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{p+q}} (-1)^{\sigma \circ \widehat{\tau}} (\omega \otimes \rho)^{\sigma \circ \widehat{\tau}} \right] =$$

$$= \frac{1}{p!} \sum_{\tau \in \Sigma_p} (\omega \otimes \rho)_{alt} = (\omega \otimes \rho)_{alt}$$

dove, nell'ultimo passaggio, si è sfruttato il fatto che i $p!$ termini della sommatoria sono tutti uguali a $(\omega \otimes \rho)_{alt}$.

La dimostrazione dell'altra identità, cioè $(\omega \otimes \rho_{alt})_{alt} = (\omega \otimes \rho)_{alt}$, è del tutto analoga alla precedente, e quindi la omettiamo. ■

Passiamo a dimostrare l'anticommutatività del prodotto esterno, cioè

$$\rho \wedge \omega = (-1)^{pq} \omega \wedge \rho, \tag{8}$$

per ogni $\omega \in \Lambda^p(V^*), \rho \in \Lambda^q(V^*)$. Anche in questo caso, la (8) segue immediatamente dal seguente lemma più generale.

Lemma 4 *Per ogni $\omega \in T_0^p(V^*), \rho \in T_0^q(V^*)$ vale*

$$(\omega \otimes \rho)_{alt} = (-1)^{pq}(\rho \otimes \omega)_{alt}$$

Proof. In effetti,

$$(\omega \otimes \rho)_{alt}(v_1, \dots, v_{p+q}) =$$

$$= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} (-1)^\sigma \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \rho(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)})$$

$$= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} (-1)^\sigma \rho(v_{\sigma\circ\tau(1)}, \dots, v_{\sigma\circ\tau(q)}) \omega(v_{\sigma\circ\tau(q+1)}, \dots, v_{\sigma\circ\tau(q+p)}), \quad (9)$$

dove

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & q & q+1 & \dots & q+p \\ \\ p+1 & \dots & p+q & 1 & \dots & p \end{pmatrix},$$

per cui $(-1)^\tau = (-1)^{pq}$ (infatti, per riportare gli ultimi p numeri al loro posto naturale, ognuno di essi deve scambiarsi successivamente con i q numeri $p+q, p+q-1, \dots, p+1$); d'altra parte, al variare di $\sigma \in S_{p+q}$, la permutazione composta $\sigma \circ \tau$ descrive anch'essa tutto S_{p+q}; quindi la (9) si riscrive come

$$(\omega \otimes \rho)_{alt}(v_1, \dots, v_{p+q}) =$$

$$= \frac{(-1)^{pq}}{(p+q)!} \sum_{\sigma\circ\tau \in S_{p+q}} (-1)^\sigma (-1)^\tau \rho(v_{\sigma\circ\tau(1)}, \dots, v_{\sigma\circ\tau(q)}) \omega(v_{\sigma\circ\tau(q+1)}, \dots, v_{\sigma\circ\tau(q+p)}) =$$

$$= (-1)^{pq}(\rho \otimes \omega)_{alt}(v_1, \dots, v_{p+q}),$$

come volevasi dimostrare. ■

2.2 Monomi esterni

Sia V^n uno spazio vettoriale reale e siano $\phi_1, \dots, \phi_p \in V^*$, allora $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_p \in \Lambda^p(V^*)$ è una p-forma esterna su V, cioè un'applicazione

$$\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_p : \underbrace{V \times \dots \times V}_{p \text{ fattori}} \to \mathbb{R}$$

lineare in ciascuno dei suoi p argomenti e antisimmetrica (cioè, che cambia di segno se si scambiano fra loro due suoi argomenti). Vogliamo dimostrare che

$$\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p(v_1, \ldots, v_p) = \det \|\phi_i(v_j)\|_{i,j=1,\ldots,p} \tag{10}$$

per ogni $v_1, \ldots, v_p \in V$.

Osserviamo, innanzitutto, che entrambi i membri della (10) sono funzioni multilineari e antisimmetriche tanto degli argomenti vettoriali $v_1, \ldots, v_p$ quanto di quelli covettoriali $\phi_1, \ldots, \phi_p$; di conseguenza, possiamo limitarci a dimostrare la (10) nel caso in cui i vettori appartengono a una base fissata $(e_1, \ldots, e_n)$ di V e i covettori alla base duale $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$ (definita, lo ricordiamo dalle formule $\varepsilon^i(e_j) = \delta^i_j$): dobbiamo dunque dimostrare che

$$\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_p}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}) = \det \left\|\delta^{i_r}_{j_r}\right\|_{r=1,\ldots,p} \tag{11}$$

per ogni possibile scelta delle sequenze $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n$, $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leq n$; in altre parole, il primo membro di (11) è uguale a 1 quando $i_1 = j_1, \ldots, i_p = j_p$ ed è nullo altrimenti.

Nel caso $p = n$ c'è un'unica sequenza di indici da considerare, cioè $(1, 2, \ldots, n)$ e la (11) si riduce a

$$\varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n(e_1, \ldots, e_n) = 1; \tag{12}$$

la dimostreremo per induzione su n. Supponiamo, quindi, che essa valga per gli spazi vettoriali di dimensione minore di n e dimostriamola per quelli di dimensione n. In effetti, detta $\omega = \varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{n-1} \in \Lambda^{n-1}(V^*)$ e detta $F : W \to V$ l'inclusione del sottospazio $W =< e_1, \ldots, e_{n-1} >$ nello spazio V, vale

$$F^*(\omega) = F^*(\varepsilon^1) \wedge \cdots \wedge F^*(\varepsilon^{n-1});$$

ma $F^* : \Lambda(V^*) \to \Lambda(W^*)$ è semplicemente la restrizione a W delle forme esterne su V, cioè

$$\widetilde{\alpha} = F^*(\alpha) = \alpha|_W ,$$

per ogni $\alpha \in \Lambda(V^*)$; per cui $(\widetilde{\varepsilon}^1 = F^*(\varepsilon^1), \ldots, \widetilde{\varepsilon}^{n-1} = F^*(\varepsilon^{n-1}))$ non è altro che la base duale della base $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ di W, e $\widetilde{\omega} = \widetilde{\varepsilon}^1 \wedge \cdots \wedge \widetilde{\varepsilon}^{n-1}$ è la restrizione di ω a W. Calcoliamo ora il primo membro di (12):

$$\varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n(e_1, \ldots, e_n) = \omega \wedge \varepsilon^n(e_1, \ldots, e_n) =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} (-1)^\sigma \omega(e_{\sigma_1}, \ldots, e_{\sigma_{n-1}}) \varepsilon^n(e_{\sigma_n}) =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\substack{\sigma \in \Sigma_n \\ \sigma_n = n}} (-1)^\sigma \widetilde{\omega}(e_{\sigma_1}, \ldots, e_{\sigma_{n-1}}) =$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\tau \in \Sigma_{n-1}} (-1)^\tau \widetilde{\omega}(e_{\tau_1}, \ldots, e_{\tau_{n-1}}) =$$

$$= \widetilde{\omega}_{alt}(e_1, \ldots, e_{n-1}) = \widetilde{\omega}(e_1, \ldots, e_{n-1}) =$$

$$= \widetilde{\varepsilon}^1 \wedge \cdots \wedge \widetilde{\varepsilon}^{n-1}(e_1, \ldots, e_{n-1}) = 1,$$

per l'ipotesi d'induzione. Dunque, la (12) è dimostrata; conseguentemente, per quanto detto in precedenza, è dimostrata anche la (10) nel caso $p = n$, cioè

$$\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n(v_1, \ldots, v_n) = \det \|\phi_i(v_j)\|_{i,j=1,\ldots,n} \tag{13}$$

per ogni $\phi_1, \ldots, \phi_n \in V^*,\ v_1, \ldots, v_n \in V$.

A questo punto, è facile ridurre la (10) al caso speciale appena dimostrato, procedendo come segue. Sia $W =< v_1, \ldots, v_p >$ e sia $F : W \to V$ l'inclusione; come prima, sia $\widetilde{\alpha} = F^*(\alpha) \in \Lambda(W^*)$ la restrizione a W di $\alpha \in \Lambda(V^*)$; allora, come prima,

$$\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p(v_1, \ldots, v_p) = F^*(\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p)(v_1, \ldots, v_p) =$$

$$= F^*(\phi_1) \wedge \cdots \wedge F^*(\phi_p)(v_1, \ldots, v_p) = \widetilde{\phi}_1 \wedge \cdots \wedge \widetilde{\phi}_p(v_1, \ldots, v_p);$$

e poichè quest'ultima espressione rientra nel caso particolare (13) già dimostrato (con p al posto di n e le $\widetilde{\phi}_i$ al posto delle ϕ_j), la (10) è finalmente dimostrata.

Vediamo alcune importanti conseguenze della formula (10).

Proposition 5 *I covettori $\phi_1, \ldots \phi_p \in V^*$ sono linearmente dipendenti se e solo se*

$$\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p = 0 \tag{14}$$

Proof. In effetti, se i covettori sono dipendenti, per esempio

$$\phi_p = \sum_{i=1}^{p-1} a_i \phi_i,$$

allora

$$\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p = \sum_{i=1}^{p-1} a_i \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_{p-1} \wedge \phi_i = 0,$$

perchè ognuno dei termini nella sommatoria ha un fattore di primo grado ripetuto e quindi, per l'antisimmetria, è nullo. Viceversa, supponiamo che $\phi_1, \ldots, \phi_p$ siano linearmente indipendenti, allora si ptranno completare a una base $(\phi_1, \ldots, \phi_n)$ di V^*, che a sua volta sarà la base duale di una base $(e_1, \ldots, e_n)$ di V. Ma allora, applicando la (10), si ha

$$\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p(e_1, \ldots, e_p) = \det \|\phi_i(e_j)\|_{i,j=1,\ldots,p} = \det \|\delta_{ij}\|_{i,j=1,\ldots,p} = 1,$$

per cui $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p$ è non nullo. ■

Un'ulteriore proprietà dei monomi esterni verrà dimostrata nella proposizione 12.

2.2.1 Un'applicazione: la formula di Laplace per i determinanti

Sia

$$\Omega = \varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n \in \Lambda^n(V^*)$$

la forma di volume su V associata alla base $(e_1, \ldots, e_n)$, e sia

$$\omega^k = \varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\varepsilon^k} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n$$

la (n-1)-forma ottenuta da Ω eliminando il fattore ε^k. Evidentemente, vale:

$$\Omega = (-1)^{k-1} \varepsilon^k \wedge \omega^k, \tag{15}$$

da cui segue

$$\omega^k = (-1)^{k-1} e_k \lrcorner\, \Omega$$

(in effetti, basta inserire e_k in entrambi i membri di (15) e tener conto del fatto che $e_k \lrcorner \omega^k = 0$; quest'ultima eguaglianza segue immediatamente per induzione sul numero $n-1$ dei fattori di ω^k, osservando che un prodotto interno $v \lrcorner (\alpha \wedge \beta)$ è nullo se lo sono $v \lrcorner \alpha$ e $v \lrcorner \beta$). Allora, per ogni $v_1, \ldots, v_n \in V$ vale

$$\Omega(v_1, \ldots, v_n) = (-1)^{k-1} \varepsilon^k \wedge \omega^k(v_1, \ldots, v_n)$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{(n-1)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_n} (-1)^\sigma \varepsilon^k(v_{\sigma(1)}) \omega^k(v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(n)})$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{h=1}^{n} \varepsilon^k(v_h) \sum_{\substack{\sigma \in \Sigma_n \\ \sigma(1)=h}} (-1)^\sigma \omega^k(v_{\sigma(2)}, \ldots . v_{\sigma(n)}) \tag{16}$$

Ora, per ogni $\sigma \in \Sigma_n$ tale $\sigma(1) = h$, la (n-1)-pla $(\sigma(2), \ldots, \sigma(n))$ è una permutazione dell'(n-1)-insieme $(1, \ldots, h-1, h+1, \ldots, n)$, la cui parità è uguale a $(-1)^\sigma(-1)^{h-1}$; infatti, per riportare all'ordine naturale la sequenza $(h = \sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$ si può procedere così: prima si riordinano gli indici $\sigma(2), \ldots, \sigma(n)$ e poi, con $h-1$ scambi successivi, si sposta $\sigma(1) = h$ dalla prima all'h-ma posizione; quindi, si ha

$$\omega^k(v_{\sigma(2)}, \ldots . v_{\sigma(n)}) = (-1)^\sigma(-1)^{h-1}\omega^k(v_1, \ldots, \widehat{v_h}, \ldots, v_n),$$

per cui il termine generale dell'ultima sommatoria in (16) risulta indipendente da σ (perchè $(-1)^{2\sigma} = 1$); quindi la sommatoria si riduce al prodotto di questo termine per il numero $(n-1)!$ di termini della sommatoria stessa, in definitiva, (16) diventa:

$$\begin{aligned} \Omega(v_1, \ldots, v_n) &= \frac{(-1)^{k-1}}{(n-1)!} \sum_{h=1}^{n} \varepsilon^k(v_h)(n-1)!(-1)^{h-1}\omega^k(v_1, \ldots, \widehat{v_h}, \ldots, v_n) \\ &= \sum_{h=1}^{n} (-1)^{k+h}\varepsilon^k(v_h)\omega^k(v_1, \ldots, \widehat{v_h}, \ldots, v_n) \end{aligned} \tag{17}$$

Ma la (17) è proprio la versione "invariante" del classico sviluppo di Laplace di un determinante. Infatti, dette $(v_i^1, \ldots, v_i^n)$ le componenti di v_i nella base $(e_1, \ldots, e_n)$, cioè $v_i^j = \varepsilon^j(v_i)$, allora vale, per quanto visto nella sezione precedente:

$$\Omega(v_1, \ldots, v_n) = \det \left\| v_i^j \right\|_{i,j=1,\ldots,n},$$

e

$$\omega^k(v_1, \ldots, \widehat{v_h}, \ldots, v_n) = \det \left\| v_i^j \right\|_{i \neq h, j \neq k}$$

per cui la (17) si riscrive

$$\det \left\| v_i^j \right\|_{i,j=1,\ldots,n} = \sum_{h=1}^{n} (-1)^{k+h} v_h^k \det \left\| v_i^j \right\|_{i \neq h, j \neq k},$$

che è proprio lo sviluppo di Laplace del determinante a primo membro rispetto alla k-ma colonna.

2.2.2 Espressione in coordinate di una forma esterna

Sia $\omega \in \Lambda^p(V^*)$ e sia $(e_1, \ldots, e_n)$ una base di V. E' chiaro, dalla linearità e dall'antisimmetria delle forme esterne, che per determinare ω basta conoscere le quantità

$$\omega_{i_1 \ldots i_p} \stackrel{\text{def}}{=} \omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}), \tag{18}$$

per ogni sequenza strettamente crescente di indici $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n$. Dunque, la dimensione di $\Lambda^p(V^*)$ non supera il numero di queste quantità, che è pari a

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!};$$

In realtà, come vedremo subito, tale numero è proprio la dimensione di $\Lambda^p(V^*)$.

Theorem 6 *Fissata una base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ di V, e detta $\mathcal{B}^* = (\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$ la sua base duale, le forme*

$$\left\{\varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_p} \;\; | \;\; 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n\right\} \tag{19}$$

costituiscono una base di $\Lambda^p(V^*)$, che ha quindi dimensione $\binom{n}{p}$. In tale base le espressioni (18) costituiscono le componenti della generica forma $\omega \in \Lambda^p(V^*)$, cioè

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \omega_{i_1 \ldots i_p} \varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_p} \tag{20}$$

Inoltre, se $v_1, \ldots, v_p \in V$ hanno componenti $v_j \equiv (v_j^1, \ldots, v_j^n)$ nella base $\mathcal{B}$, allora

$$\omega(v_1, \ldots, v_p) = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \omega_{i_1 \ldots i_p} V^{i_1 \ldots i_p}, \tag{21}$$

con

$$V^{i_1 \ldots i_p} = \det \left\| v_r^{i_s} \right\|_{r,s=1,\ldots,p}$$

Proof. Applicando la formula (11), si ottiene, per ogni $1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n$,

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_p} \omega_{i_1 \ldots i_p} \varepsilon^{i_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{i_p}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p}) =$$

$$= \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \omega_{i_1 \ldots i_p} \det \left\| \delta_{j_r}^{i_s} \right\|_{s,r=1,\ldots,p} = \omega_{j_1 \ldots j_p} = \omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_p})$$

(perchè l'unico determinante non nullo nella seconda sommatoria è quello corrispondente a $i_1 = j_1, \ldots, i_p = j_p$); ciò prova la (20). Inoltre, tale espressione di ω come combinazione lineare delle forme (19) è unica, per cui le (19) costituiscono effettivamente una base di $\Lambda^p(V^*)$. Quanto alla (21), segue immediatamente da (20), applicando la (10). ■

Remark 7 *Analogamente a quanto appena visto per l'algebra esterna $(\Lambda(V^*), \wedge)$, anche per l'algebra simmetrica $(S(V), \odot)$ esiste una base associata a $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. Precisamente, vale il seguente risultato.*

Theorem 8 *Fissata una base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ di V, e detta $\mathcal{B}^* = (\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$ la sua base duale, le forme*

$$\{\varepsilon^{r_1} \odot \cdots \odot \varepsilon^{r_p} \quad | \quad 1 \leq r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_p \leq n\} \tag{22}$$

costituiscono una base di $S^p(V^*)$, che ha quindi dimensione $\binom{n-1+p}{p}$. In tale base le espressioni

$$\alpha_{r_1 \ldots r_p} = \alpha(e_{r_1}, \ldots, e_{r_p})$$

costituiscono le componenti del generico tensore simmetrico $\alpha \in \Lambda^p(V^*)$, cioè

$$\alpha = \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_p} \alpha_{r_1 \ldots r_p} \varepsilon^{r_1} \odot \cdots \odot \varepsilon^{r_p} \tag{23}$$

Inoltre, se $v_1, \ldots, v_p \in V$ hanno componenti $v_j \equiv (v_j^1, \ldots, v_j^n)$ nella base $\mathcal{B}$, allora

$$\alpha(v_1, \ldots, v_p) = \sum_{r_1 \leq \cdots \leq r_p} \omega_{i_1 \ldots i_p} H^{i_1 \ldots i_p}, \tag{24}$$

con[3]

$$H^{i_1 \ldots i_p} = perm\, \| v_h^{r_k} \|_{h,k=1,\ldots,p}$$

Questo teorema, la cui dimostrazione è del tutto analoga a quella del teorema precedente, completa l'osservazione fatta nel Remark 1 a pag. 3

Osserviamo che dal teorema 6 segue che, per $p > n$, vale $\dim \Lambda^p(V^*) = 0$, cioè tutte le forme esterne di grado maggiore della dimensione di V sono nulle; ciò segue anche dal fatto che una forma esterna si annulla se i suoi argomenti sono linearmente dipendenti. In effetti, è ovvio, per l'antisimmetria, che una forma esterna $\omega \in \Lambda^p(V^*)$ si annulla se due dei suoi argomenti sono uguali. Ora, se, più in generale, uno degli argomenti, ad esempio l'ultimo, dipende dai precedenti:

$$v_p = \sum_{k=1}^{p-1} b^k v_k,$$

allora (sfruttando la multilinearità di ω)

$$\omega(v_1, \ldots, v_p) = \sum_{k=1}^{p-1} b^k \omega(v_1, \ldots, v_{p-1}, v_k) = 0,$$

perchè in ogni termine della sommatoria ω ha due argomenti uguali. In realtà, nel caso $p = n$, vale anche l'implicazione inversa.

[3]Ricordiamo che il *permanente* di una matrice quadrata $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,\ldots,n}$ è la quantità

$$perm(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

Proposition 9 *Sia* $\omega \in \Lambda^n(V^*)\setminus\{0\}$*, con* $n = \dim V$*, e siano* $v_1, \dots, v_n \in V$*. Allora* $\omega(v_1, \dots, v_n) = 0$ *se e solo se* $v_1, \dots, v_n$ *sono linearmente dipendenti.*

Proof. Il "se" lo abbiamo appena visto, dimostriamo il "solo se". Sia, dunque, ω una n-forma non nulla su V^n, e siano $v_1, \dots, v_n \in V$ tali che $\omega(v_1, \dots, v_n) = 0$. Se, per assurdo, questi vettori fossero indipendenti, allora essi formerebbero una base di V, che avrebbe una base duale $(v_1^*, \dots, v_n^*)$ in V^*. Ma allora, essendo $\dim \Lambda^n(V^*) = 1$, ed essendo $v_1^* \wedge \dots \wedge v_n^* \neq 0$ in quanto

$$v_1^* \wedge \dots \wedge v_n^*(v_1, \dots, v_n) = 1,$$

tale n-forma genererebbe $\Lambda^n(V^*)$, e quindi si avrebbe

$$\omega = \lambda v_1^* \wedge \dots \wedge v_n^*,$$

per qualche costante $\lambda \neq 0$, da cui seguirebbe l'assurdo

$$0 = \omega(v_1, \dots, v_n) = \lambda v_1^* \wedge \dots \wedge v_n^*(v_1, \dots, v_n) = \lambda \neq 0,$$

■

2.3 Prodotto interno

Dati un vettore $v \in V$ e una forma esterna $\omega \in \Lambda^p(V^*)$, si chiama *prodotto interno* (o anche *contrazione*) di v con ω la $(p-1)$-forma $v \lrcorner \omega \in \Lambda^{p-1}(V^*)$ definita dalla formula

$$v \lrcorner \omega(v_1, \dots, v_{p-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \omega(v, v_1, \dots, v_{p-1}),$$

per ogni $v_1, \dots, v_{p-1} \in V$; in altre parole, la contrazione di v con ω si ottiene fissando il primo argomento di ω eguale a v. A volte denoteremo l'applicazione $\omega \longmapsto v \lrcorner \omega$ con

$$i_v : \Lambda^p(V^*) \to \Lambda^{p-1}(V^*);$$

tale applicazione, definita per ogni $p \in \mathbb{N}$, è lineare, e dipende linearmente anche da v. Inoltre,

$$i_v \circ i_w = -i_w \circ i_v,$$

per ogni $v, w \in V$; infatti,

$$v \lrcorner (w \lrcorner \omega) = w \lrcorner \omega(v, \dots) = \omega(w, v, \dots) = -\omega(v, w, \dots) = -w \lrcorner (v \lrcorner \omega),$$

per ogni $\omega \in \Lambda(V^*)$.

Vediamo ora come il prodotto interno è legato a quello esterno. Per questo, consideriamo dapprima un caso particolare, ma fondamentale.

Lemma 10 *Siano $v \in V, \phi_1, \ldots, \phi_p \in V^*$, allora*

$$v \lrcorner (\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p) = \sum_{r=1}^{p} (-1)^{r+1} \phi_r(v) \phi_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\phi_r} \wedge \cdots \wedge \phi_p, \tag{25}$$

dove, come al solito, il cappello su un argomento indica che tale argomento non compare.

Proof. La dimostrazione segue agevolmente dalla (10). In effetti,

$$v \lrcorner (\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p)(w_1, \ldots, w_{p-1}) = \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p(v, w_1, \ldots, w_{p-1})$$

$$= \begin{vmatrix} \phi_1(v) & \phi_1(w_1) & \ldots & \phi_1(w_{p-1}) \\ \phi_2(v) & \phi_2(w_1) & \ldots & \phi_2(w_{p-1}) \\ \vdots & & & \\ \phi_p(v) & \phi_p(w_1) & \ldots & \phi_p(w_{p-1}) \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{r=1}^{p} (-1)^{r+1} \phi_r(v) \det \| \phi_h(w_j) \|_{h=1,\ldots,p,\ h \neq r}^{j=1,\ldots p-1}$$

$$= \sum_{r=1}^{p} (-1)^{r+1} \phi_r(v) \phi_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\phi_r} \wedge \cdots \wedge \phi_p(w_1, \ldots w_{p-1}),$$

per ogni $w_1, \ldots, w_{p-1} \in V$, cioè l'asserto. ∎

Passiamo ora al caso generale.

Theorem 11 *Siano $v \in V, \omega \in \Lambda^p(V^*), \rho \in \Lambda^q(V^*)$; allora,*

$$v \lrcorner (\omega \wedge \rho) = (v \lrcorner \omega) \wedge \rho + (-1)^p \omega \wedge (v \lrcorner \rho) \tag{26}$$

Proof. La dimostrazione si basa sul lemma precedente e sul fatto che entrambi i membri di (26) dipendono linearmente da ω e ρ. Da ciò e dal fatto che ogni forma esterna è combinazione lineare di monomi esterni (v. sezione 2.2.2) segue che basta dimostrare la (26) nel caso in cui ω, ρ siano monomi:

$$\omega = \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p, \quad \rho = \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_q,$$

con $\phi_1, \dots, \phi_p, \psi_1, \dots, \psi_q \in V^*$; per farlo, utilizzeremo la (25):

$$v \lrcorner (\omega \wedge \rho) = v \lrcorner (\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p \wedge \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_q) =$$

$$= \sum_{r=1}^{p} (-1)^{r+1} \phi_r(v) \phi_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\phi_r} \wedge \cdots \wedge \phi_p \wedge \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_q$$
$$+ \sum_{s=1}^{q} (-1)^{p+s+1} \psi_s(v) \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p \wedge \psi_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\psi_s} \wedge \wedge \psi_q =$$

$$= \left(\sum_{r=1}^{p} (-1)^{r+1} \phi_r(v) \phi_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\phi_r} \wedge \cdots \wedge \phi_p \right) \wedge \rho$$
$$+ (-1)^p \omega \wedge \left(\sum_{s=1}^{q} (-1)^{s+1} \psi_s(v) \wedge \psi_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\psi_s} \wedge \wedge \psi_q \right) =$$

$$= (v \lrcorner \omega) \wedge \rho + (-1)^p \omega \wedge (v \lrcorner \rho),$$

cioè l'asserto. ∎

Utilizziamo i risultati del teorema precedente per dimostrare un'ulteriore proprietà dei monomi esterni.

Proposition 12 *Siano $\phi_1, \dots, \phi_p \in V^*$ e $\psi_1, \dots, \psi_p \in V^*$ due insiemi di covettori linearmente indipendenti. Allora i due gruppi di vettori generano lo stesso sottospazio di V^* se e solo se le corrispondenti forme esterne $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p, \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_p$ sono proporzionali. In particolare, vale*

$$\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p = \psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_p \tag{27}$$

se e solo se

$$\psi_j = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} \phi_i, \quad j = 1, \dots, p, \tag{28}$$

con

$$\det \|a_{ij}\|_{i,j=1,\dots,p} = 1 \tag{29}$$

Proof. In effetti, se i due sistemi di vettori generano lo stesso sottospazio $Z \subset V^*$, allora valgono relazioni della forma (28), dove la matrice $A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,\dots,p}$ è non singolare (ma non vale necessariamente la(29)). Quindi, sfruttando la p-linearità e l'antisimmetria, si ha

$$\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_p = |A| \, \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p \neq 0;$$

Viceversa, supponiamo che esista una costante $\lambda \neq 0$ tale che

$$\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_p = \lambda \phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_p \neq 0$$

(l'ultima diseguaglianza segue dall'ipotesi d'indipendenza dei ϕ_i e dalla proposizione 5); allora, detta $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ una base di V tale che $\phi_1 = \varepsilon^1, \ldots \phi_p = \varepsilon^p$, dove $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^p)$ è la base duale di $\mathcal{B}$, si ha

■

2.4 Pullback e prodotto esterno

Sia
$$F : V^n \to W^m$$
un'applicazione lineare fra due spazi vettoriali reali. Com'è noto, a F è associato il pullback
$$F^* : W^* \to V^*$$
definito da
$$F^*(\psi) \stackrel{\text{def}}{=} \psi \circ F,$$
per ogni $\psi \in W^*$. In realtà, il pullback si estende naturalmente a tutte le forme esterne, di qualsiasi grado; precisamente, per ogni intero p, il *pullback*
$$F^* : \Lambda^p(W^*) \to \Lambda^p(V^*)$$
è definito dalla formula
$$F^*(\rho)(v_1, \ldots, v_p) \stackrel{\text{def}}{=} \rho(F(v_1), \ldots, F(v_p)), \tag{30}$$
per ogni $\rho \in \Lambda^p(W^*), v_1, \ldots, v_p \in V$; estendendo per linearità, si ottiene un'applicazione
$$F^* : \Lambda(W^*) \to \Lambda(V^*)$$
che, oltre ad essere lineare, è anche un omomorfismo di algebre esterne, nel senso che vale
$$F^*(\omega \wedge \rho) = F^*(\omega) \wedge F^*(\rho), \tag{31}$$
per ogni $\omega \in \Lambda^p(W^*), \rho \in \Lambda^q(W^*)$. In effetti,

$$F^*(\omega \wedge \rho)(v_1, \ldots, v_{p+q}) = \omega \wedge \rho(F(v_1), \ldots, F(v_{p+q})) =$$

$$= \frac{(p+q)!}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} (-1)^\sigma \omega(F(v_{\sigma(1)}, \ldots, F(v_{\sigma(p)}))\rho(F(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, F(v_{\sigma(p+q)}))$$

$$= \frac{(p+q)!}{p!q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} (-1)^\sigma F^*(\omega)(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)})F^*(\rho)(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)})$$

$$= F^*(\omega) \wedge F^*(\rho)(v_1, \ldots, v_{p+q}),$$

per ogni $v_1, \ldots, v_{p+q} \in V$, cioè la (**??**).

Per quanto riguarda l'interazione fra pullback e prodotto interno, vale

$$F^*(F(v) \lrcorner \omega) = v \lrcorner F^*(\omega),$$

per ogni $F \in End(V), v \in V, \omega \in \Lambda^p(V^*)$; in effetti,

$$F^*(F(v) \lrcorner \omega)(v_1, \ldots, v_{p-1}) = F(v) \lrcorner \omega(F(v_1), \ldots, F(v_{p-1})) =$$

$$= \omega(F(v), F(v_1), \ldots, F(v_{p-1})) = F^*(\omega)(v, v_1, \ldots, v_{p-1}) = v \lrcorner F^*(\omega)(v_1, \ldots, v_{p-1})$$

Proposition 13 *Sia $F \in End(V^n)$; allora vale*

$$(\lambda F)^*(\omega) = \lambda^p F^*(\omega), \tag{32}$$

per ogni $\omega \in \Lambda^p(V^*), \lambda \in \mathbb{R}$. Inoltre, se $G \in End(V)$, allora

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^* \tag{33}$$

Proof. In effetti, vale

$$\omega(\lambda F(v_1), \ldots, \lambda F(v_p)) = \lambda^p \omega(F(v_1), \ldots, F(v_p)),$$

cioè la (32); quanto alla (33), essa segue banalmente dalla definizione (30). ■

Remark 14 *Notiamo che, per $p > 1$, il pullback di p-forme esterne lungo un endomorfismo non è additivo, cioè*

$$(F + G)^* \neq F^* + G^*$$

Il pullback delle forme esterne permette di caratterizzare in maniera "invariante" la nozione di determinante di un endomorfismo (solitamente definito come il determinante della matrice rappresentativa in una base fissata). Sia $F \in End(V^n)$, e sia $\omega \in \Lambda^n(V^*)$. Allora $F^*(\omega)$ deve essere proporzionale a ω, perchè entrambe le forme appartengono a $\Lambda^n(V^*)$, che ha dimensione 1; deve quindi esistere una costante reale k (dipendente, a priori, da ω) tale che

$$F^*(\omega) = k\omega \tag{34}$$

Ma, in realtà, k non dipende da ω; infatti, se $\rho \in \Lambda^n(V^*)$ è un'altra n-forma, allora, per lo stesso motivo di prima, deve valere

$$\rho = a\omega,$$

per qualche $a \in \mathbb{R}$; ma allora

$$F^*(\rho) = aF^*(\omega) = ak\omega = k\rho$$

Dunque, la costante k in (34) dipende solo da F; in realtà, essa è proprio il determinante di F, cioè la (34) si riscrive

$$F^*(\omega) = (\det F)\omega, \tag{35}$$

per ogni $\omega \in \Lambda^n(V^*)$. Infatti, scegliamo

$$\omega = \varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n,$$

dove, come al solito, $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$ è la base duale di una base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ fissata in V. Detta $\left\|a^i_j\right\|$ è la matrice di F in $\mathcal{B}$, cioè

$$F(e_j) = \sum_i a^i_j e_i,$$

e quindi

$$F^*(\varepsilon^j) = \sum_k a^j_k \varepsilon^k,$$

si ha

$$F^*(\omega) = F^*(\varepsilon^1) \wedge \cdots \wedge F^*(\varepsilon^n) = \sum_{k_1,\ldots,k_n=1}^{n} a^1_{k_1} \ldots a^n_{k_n} \varepsilon^{k_1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^{k_n} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a^1_{\sigma(1)} \ldots a^n_{\sigma(n)} \varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n = |A|\, \varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n = |F|\, \omega$$

Dunque, la (35) si può prendere proprio come definizione di determinante dell'endomorfismo $F \in End(V)$. Questa definizione "concettuale" presenta numerosi vantaggi rispetto a quella standard per mezzo di matrici. A titolo esemplificativo, ridimostriamo, partendo dalla definizione (35), alcuni risultati standard della teoria dei determinanti.

Proposition 15 *Il determinante di un endomorfismo $F \in End(V)$ è nullo se e solo se l'endomorfismo è non invertibile.*

Proof. Se F è non invertibile, allora ha un nucleo non banale:

$$KerF = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$$

Detta $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ una base di V che completi il sistema di generatori di $KerF$, e detta, come al solito, $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$ la base duale di $\mathcal{B}$, sia $\omega = \varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n \neq 0$ il monomio associato, per cui $\omega(e_1, \ldots, e_n) = 1$ (v. formula (12)). Allora, dalla definizione (35) segue

$$\det F = \frac{F^*(\omega)(e_1, \ldots, e_n)}{\omega(e_1, \ldots, e_n)} = \omega(F(e_1), \ldots, F(e_n))$$

$$= \omega(0, \ldots, 0, e_{k+1}, \ldots, e_n) = 0$$

Viceversa, se $\det F = 0$, allora per la (35) vale

$$F^*(\omega) = 0, \tag{36}$$

per ogni $\omega \in \Lambda^n(V^*)$, in particolare per $\omega = \varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n$, dove $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$ è una base di V^*; ma allora la (36) si riscrive

$$F^*(\varepsilon^1) \wedge \cdots \wedge F^*(\varepsilon^n) = 0,$$

da cui, tenendo conto della proposizione 5, segue che $F^*(e_1), \ldots, F^*(\varepsilon^n)$ sono linearmente dipendenti, cioè $F^* : V^* \to V^*$ ha rango minore di n; poichè tale rango è uguale a quello di F, l'asserto è dimostrato. ■

Theorem 16 *(teorema di Binet) Siano $F, G \in End(V^n)$; allora vale*

$$\det(G \circ F) = \det G \det F \tag{37}$$

Proof. In effetti, fissata la n-forma non nulla ω, vale (tenendo conto della (33)):

$$\det(G \circ F)\ \omega = (G \circ F)^*(\omega) = F^*(G^*(\omega)) =$$

$$= F^*(\det G\ \omega) = \det G\ F^*(\omega) = \det G \det F \omega,$$

da cui la (37). ■

Theorem 17 *(determinanti di matrici a blocchi) Sia $F \in End(V^n)$ e sia*

$$V^n = W^p \oplus Z^q, \tag{38}$$

con $W, Z \subset V$ sottospazi F-invarianti, per cui

$$F = F_W \oplus F_Z,$$

con $F_W \in End(W), F_Z \in End(Z)$ restrizioni di F a W e a Z, rispettivamente; allora

$$\det F = \det F_W \det F_Z$$

Proof. Sia $(e_1, \ldots, e_n)$ una base di V adattata alla scomposizione (38), cioè $(e_1, \ldots, e_p)$ è una base di W, mentre $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ è una base di Z (evidentemente, $n = p + q$). Detta, come al solito, $(\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$ la base duale, siano

$$\rho = \varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^p \in \Lambda^p(V^*), \sigma = \varepsilon^{p+1} \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n \in \Lambda^q(V^*)$$

$$\omega = \varepsilon^1 \wedge \cdots \wedge \varepsilon^n = \rho \wedge \sigma \in \Lambda^n(V^*);$$

allora vale

$$z \lrcorner \rho = 0,\ w \lrcorner \sigma = 0, \tag{39}$$

per ogni $z \in Z, w \in W$. Siano

$$I_W : W \to V,\ \ I_Z : Z \to V$$

le inclusioni di W, Z in V, e

$$P_W : V \to W,\quad P_Z : V \to Z$$

le proiezioni associate alla somma diretta (38); allora

$$F = G_W + G_Z, \tag{40}$$

dove

$$G_W = I_W \circ F_W \circ P_W,\quad G_Z = I_Z \circ F_Z \circ P_Z;$$

notiamo che

$$\operatorname{Im} G_W \subset W,\ \ \operatorname{Im} G_Z \subset Z,$$

sicchè, per le (39), vale

$$(\operatorname{Im} G_W) \lrcorner \sigma = 0,\quad (\operatorname{Im} G_Z) \lrcorner \rho = 0 \tag{41}$$

Siano, infine

$$\widetilde{\rho} = I_W^*(\rho) \in \Lambda^p(W),\quad \widetilde{\sigma} = I_Z^*(\sigma) \in \Lambda^q(Z)$$

le restrizioni di ρ a W e di σ a Z, rispettivamente. Allora valgono

$$F^*(\rho) = P_W^*(F_W^*(\widetilde{\rho})),\quad F^*(\sigma) = P_Z^*(F_Z^*(\sigma)); \tag{42}$$

infatti, se $v_1 = w_1 + z_1, \ldots, v_p = w_p + z_p$, con $w_i \in W, z_i \in Z$, allora si ha, per le (40) e (41),

$$F^*(\rho)(v_1, \ldots, v_p) = \rho(G_W(v_1) + G_Z(v_1), \ldots, G_W(v_p) + G_Z(v_p))$$

$$= \rho(G_W(v_1), \ldots, G_W(v_p)) = \rho(F(w_1), \ldots, F(w_p)) = \widetilde{\rho}(F_W(P_W(v_1)), \ldots, F_W(P_W(v_p))),$$

cioè, la prima delle (42); la seconda si dimostra esattamente allo stesso modo. Quindi, in definitiva, vale

$$(\det F)\omega = F^*(\omega) = F^*(\rho) \wedge F^*(\sigma) = P_W^*(F_W^*(\widetilde{\rho})) \wedge P_Z^*(F_Z^*(\widetilde{\sigma})) =$$

$$= P_W^*((\det F_W)\widetilde{\rho}) \wedge P_Z^*((\det F_Z)\widetilde{\sigma}) = \det F_W \det F_Z P_W^*(\widetilde{\rho}) \wedge P_Z^*(\widetilde{\sigma}) =$$

$$= \det F_W \det F_Z\ \rho \wedge \sigma = \det F_W \det F_Z\ \omega,$$

il che implica l'asserto. ■

Proposition 18 *(formula esplicita per il determinante) Sia* $F \in End(V)$ *e sia* $A = \|A^i_j\|$ *la matrice di* F *rispetto alla base* $(e_1, \ldots, e_n)$ *di* V*, cioè*

$$F(e_j) = \sum_i a^i_j e_i,$$

per $j = 1, \ldots, n$*; allora vale*

$$\det F = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma a_1^{\sigma(1)} \ldots a_n^{\sigma(n)}$$

Proof. ..... ■