

Esercizi di Teoria dei Grafi

F. Pugliese

March 15, 2011

Abstract

Proponiamo alcuni esercizi e problemi elementari di teoria dei grafi, che possano servire agli studenti per meglio comprendere la teoria.

Exercise 1 Sia $G = (V, E)$ un grafo (semplice, non diretto), $|V| = n, |E| = m$. Sia $L(G) = (\tilde{V}, \tilde{E})$ il grafo lineare associato a G , definito da:

$$\tilde{V} = E$$

$$\tilde{E} = \{\{e_h, e_k\} \in [E]^2 \mid e_h \text{ incidente con } e_k \text{ in } G\}$$

Si calcoli il numero $|\tilde{E}|$ dei lati di $L(G)$.

Soluzione. Indichiamo con v_1, \dots, v_n e con e_1, \dots, e_m rispettivamente i vertici e i lati di G . Sia $\alpha : \tilde{E} \rightarrow V$ l'applicazione che associa a ogni coppia di lati incidenti in G il loro vertice comune. Se G è connesso, α è suriettiva. Quindi,

$$\tilde{E} = \alpha^{-1}(v_1) \cup \dots \cup \alpha^{-1}(v_n),$$

con gli addendi dell'unione a due a due disgiunti, per cui

$$|\tilde{E}| = \sum_{i=1}^n |\alpha^{-1}(v_i)|;$$

d'altra parte, $\alpha^{-1}(v_i)$ è l'insieme delle coppie (non ordinate) di lati di G incidenti con v_i , per cui vale

$$|\alpha^{-1}(v_i)| = \binom{d_i}{2} = \frac{d_i(d_i - 1)}{2},$$

con d_i valenza di v_i in G . Quindi, se G è connesso, vale

$$|\tilde{E}| = \sum_{i=1}^n \binom{d_i}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n d_i^2 - \sum_{i=1}^n d_i \right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n d_i^2 - m, \quad (1)$$

l'ultimo passaggio essendo dovuto al fatto ben noto che la somma delle valenze dei vertici di un grafo è uguale a due volte il numero dei lati ("primo teorema fondamentale"). Se G non è connesso, la (1) vale per ciascuna delle componenti connesse di G , per cui, sommando su tutte le componenti connesse (e tenendo conto del fatto ovvio che ogni lato appartiene a una sola componente e la valenza di ogni vertice dipende solo dalla componente che lo contiene) si ha che la (1) continua a valere.

Un modo alternativo di ottenere la (1) è il seguente. Sempre per il primo teorema fondamentale (applicato a $L(G)$) vale

$$2|\tilde{E}| = \sum_{h=1}^m \tilde{d}_h,$$

dove \tilde{d}_h è la valenza di e_h in $L(G)$, cioè il numero di lati di G adiacenti a e_h . Ma, evidentemente,

$$\tilde{d}_h = d(w_h) + d(z_h) - 2, \quad (2)$$

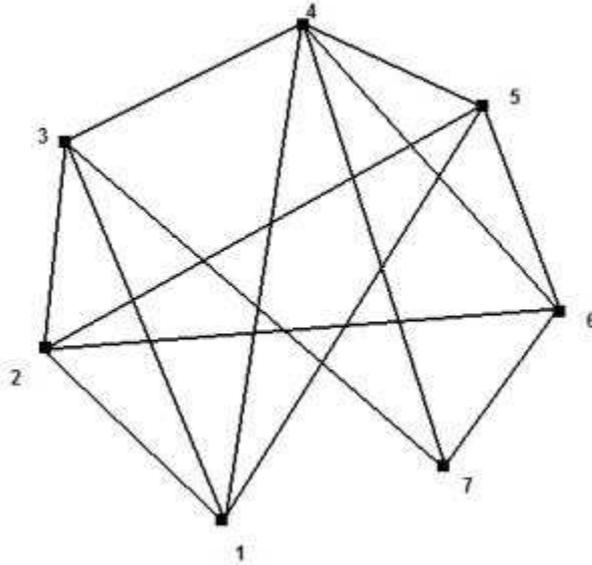
dove $w_h, z_h \in V$ sono gli estremi di e_h . E' altresì chiaro che, sommando la (2) su tutti gli m lati di G , ogni vertice $v \in V$ comparirà esattamente $d(v)$ volte, per cui

$$2|\tilde{E}| = \sum_{h=1}^m \tilde{d}_h = \sum_{i=1}^n d_i^2 - 2m,$$

cioè la (1).

Exercise 2 Sia $G = (V, E)$ il grafo (semplice, non orientato) mostrato in

figura:



studiarne il gruppo degli automorfismi.

Soluzione. Numerando i vertici di G come in figura, osserviamo che: i vertici v_1, v_2, v_3, v_5, v_6 hanno valenza 4; v_4 ha valenza 5; v_7 ha valenza 3. Quindi, in qualunque automorfismo f di G i vertici v_4 e v_7 devono rimanere fissi, mentre v_1, v_2, v_3, v_5, v_6 si possono a priori permutare fra loro. D'altro canto, v_3 e v_6 sono adiacenti a v_7 , mentre v_1, v_2, v_5 no (hanno tutti distanza 2 da v_7); quindi v_3 e v_6 devono rimanere fissi o permutarsi fra loro, e lo stesso vale per v_1, v_2, v_5 . Relativamente a questi ultimi, notiamo che solo v_1 e v_5 sono adiacenti al vertice fisso v_4 , mentre v_2 è a distanza 2 da esso; quindi, v_2 deve rimanere fisso, mentre v_1, v_5 possono rimanere fermi o permutarsi fra loro. Riepilogando, al momento sappiamo che, qualunque sia l'automorfismo $f \in \text{Aut}(G)$, deve accadere che:

1. v_2, v_4, v_7 sono fissi;
2. v_1, v_5 si trasformano fra loro (cioè, possono restare fissi o permutarsi fra loro);
3. v_3, v_6 si trasformano fra loro.

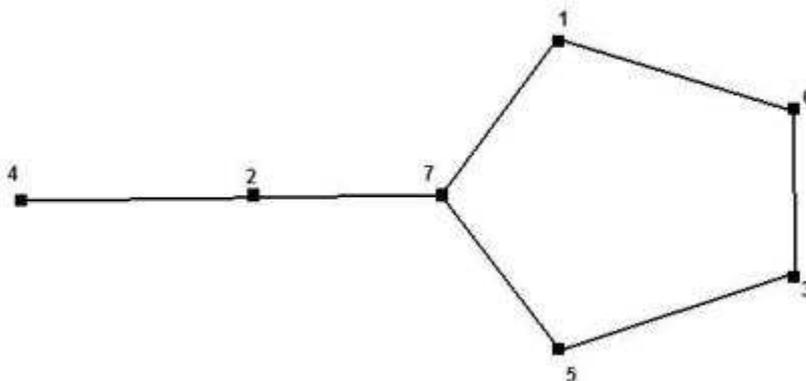
Di conseguenza, i *possibili* automorfismi non banali rimasti sono:

$$(15), (36), (15)(36).$$

Ma le prime due permutazioni non sono automorfismi di G . Infatti, se fosse $f(v_5) = v_1$, allora $f(v_6) \neq v_6$, perchè v_6 è adiacente a v_5 ma non a v_1 ; analogamente, da $f(v_6) = v_3$ segue che $f(v_5) \neq v_5$. Rimane quindi, come unico possibile automorfismo non banale, la permutazione $\sigma = (15)(36)$: in effetti, si verifica facilmente σ manda lati in lati e non-lati i non-lati, cioè è un isomorfismo. Dunque, in definitiva,

$$\text{Aut}(G) = \{id_V, \sigma\}$$

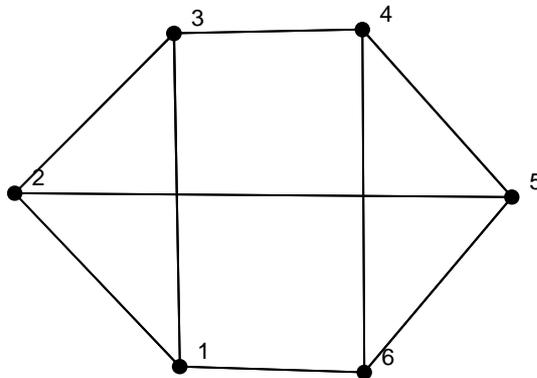
SOLUZIONE ALTERNATIVA (più rapida!). Sia $\overline{G} = (V, [V]^2 \setminus E)$ il complementare di G . Evidentemente, $\text{Aut}(G) = \text{Aut}(\overline{G})$, perchè i lati di \overline{G} sono i non-lati di G e viceversa. Ma disegnando \overline{G} ci si rende conto immediatamente che es:



la cui unica simmetria (non banale) è chiaramente la riflessione rispetto all'asse orizzontale, cioè σ .

Osservazione. E' chiaro che il secondo metodo funziona bene quando G ha una valenza media abbastanza alta, e quindi \overline{G} ha pochi lati.

Exercise 3 Sia G il grafo disegnato qui sotto:



Determinare il gruppo $Aut(G)$.

Soluzione. La figura presenta tre simmetrie evidenti: quella rispetto all'asse orizzontale, quella rispetto all'asse verticale e quella rispetto al centro dell'esagono. Tali simmetrie forniscono rispettivamente gli automorfismi

$$\sigma_1 = (13)(46), \sigma_2 = (16)(34)(25), \sigma_3 = (36)(14)(25) \quad (3)$$

E' facile verificare che tali simmetrie, assieme all'identità, formano un sottogruppo di $Aut(G)$: quindi, 2^2 divide l'ordine $|Aut(G)|$ del gruppo $Aut(G)$. Altre simmetrie si ottengono considerando il disegno come l'immagine piana di un prisma triangolare con basi 123 e 654. Tali nuove simmetrie sono le rotazioni attorno all'asse del prisma:

$$\tau_1 = (123)(654), \tau_2 = (132)(645) = \tau_1^{-1} \quad (4)$$

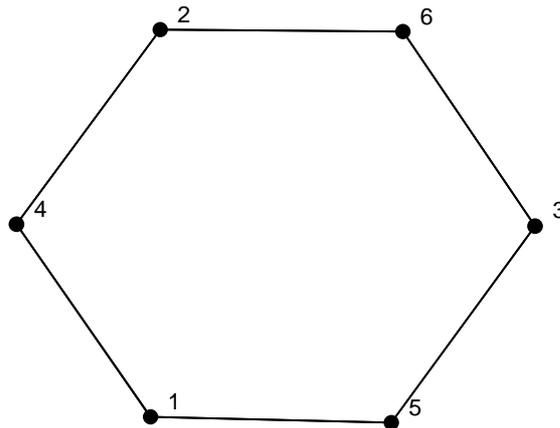
e due delle tre riflessioni rispetto ai piani bisettori delle facce del prisma:

$$\rho_1 = (23)(45), \rho_2 = (21)(65) \quad (5)$$

(la terza riflessione coincide con σ_1). E' evidente che $\{id, \tau_1, \tau_2\} \leq Aut(G)$, per cui $|Aut(G)|$ è divisibile per $2^2 \cdot 3 = 12$. Ma da $Aut(G) \leq S_6$ segue che $|Aut(G)|$ divide $|S_6| = 6! = 720$. Quindi, per ora possiamo affermare che $|Aut(G)|$ deve essere uno dei numeri seguenti: 12, 24, 48, 72, 120, 144, 240, 360

(cioè, tutti i numeri che si possono formare con i fattori primi di 720 e che siano divisibili per 24): poichè, finora, abbiamo trovato solo 8 simmetrie, è sicuro che ne esistono almeno altre 4.

Per trovare nuove simmetrie, proviamo a studiare il complementare \overline{G} (che, com'è noto ha lo stesso gruppo di simmetrie di G):



trattandosi di un ciclo, troviamo subito due nuove simmetrie, le rotazioni oraria e antioraria di ampiezza $\pi/3$:

$$\alpha_1 = (142635), \alpha_2 = \alpha_1^{-1} = (153624); \quad (6)$$

ci sono poi le riflessioni rispetto agli assi mediani:

$$\beta_1 = (26)(15)(34), \beta_2 = (35)(16)(24) \quad (7)$$

(la terza riflessione, σ_3 , l'abbiamo già considerata). Dimostriamo ora che le dodici simmetrie trovate (cioè, l'identità e le simmetrie (3), (4), (5), (6), (7)) esauriscono il gruppo $Aut(\overline{G}) = Aut(G)$. In effetti, dato un generico $\phi \in Aut(\overline{G})$, possiamo distinguere due casi:

- a) ϕ ammette punti fissi;
- b) ϕ sposta tutti i vertici di $\overline{G} = C_6$

Nel **caso a)**, sia per esempio $\phi(v_1) = v_1$. Allora (v. figura, dove ho indicato i vertici con i anzichè con v_i) deve essere anche $\phi(v_6) = v_6$: infatti,

essendo v_6 opposto a v_1 , anche $\phi(v_6)$ deve essere opposto a $\phi(v_1) = v_1$. Passando a v_4 , notiamo che esso dista 1 da v_1 e 2 da v_6 , per cui lo stesso deve valere per $\phi(v_4)$, che dunque può essere soltanto v_4 o v_5 . Nel primo caso, si vede subito che ϕ tiene fermi tutti i vertici, cioè $\phi = id$; nel secondo caso (cioè, $\phi(v_4) = v_5$) si vede immediatamente (sempre per considerazioni di conservazione di distanza) che ϕ scambia fra loro v_2 e v_3 . Quindi, in definitiva, se un automorfismo ϕ di \overline{G} ha un punto fisso $v \in V$, allora anche il vertice opposto v^* è fisso, e ϕ può essere id_V oppure la riflessione rispetto alla diagonale vv^* . Dunque, gli automorfismi con punti fissi sono 4 (l'identità e le tre riflessioni rispetto alle diagonali di \overline{G} : ρ_1, ρ_2 e σ_1).

Passiamo al **caso b**), quello in cui $\phi \in Aut(\overline{G})$ non ha punti fissi. Classifichiamo tali automorfismi in base all'immagine di v_1 :

- b-1)** Sia $\phi(v_1) = v_6$. In tal caso, per motivi di conservazione della distanza, deve essere $\phi(v_6) = v_1$; dunque, la scomposizione in cicli disgiunti di ϕ contiene il fattore (16). Il vertice v_2 può essere mandato da ϕ solo in v_4 o in v_5 (perchè $d(\phi(v_2), v_1) = d(\phi(v_2), \phi(v_6)) = d(v_2, v_6) = 1$). Se $\phi(v_2) = v_4$, allora deve essere necessariamente $\phi(v_4) = v_2$ (perchè $d(\phi(v_4), v_4) = d(\phi(v_4), \phi(v_2)) = d(v_4, v_2) = 1$, e dei due vertici a distanza 1 da v_4 il vertice v_1 è già immagine di v_6); infine, ϕ scambia fra loro v_3 e v_5 (perchè per ipotesi non ci sono punti fissi), per cui $\phi = \beta_2$. Se invece $\phi(v_2) = v_5$, allora (per considerazioni del tutto analoghe alle precedenti, che non stiamo a ripetere), deve essere $\phi = (16)(25)(34) = \sigma_2$
- b-2)** Sia $\phi(v_1) = v_4$. Allora $\phi(v_6) = v_3$ (perchè v_3 è l'unico vertice che dista da v_4 tanto quanto v_6 da v_1). Il vertice v_4 , adiacente a v_1 , deve essere spostato da ϕ in un vertice adiacente a $\phi(v_1) = v_4$, cioè in v_2 o in v_1 . Nel primo caso ($\phi(v_4) = v_2$) il vertice v_3 , opposto a v_4 , deve andare in v_5 (opposto a v_2), mentre v_2 (adiacente a v_4 e a v_6) deve andare in v_6 (adiacente a $\phi(v_4)$ e a $\phi(v_6)$); in definitiva, ϕ deve essere $(142635) = \alpha_1$. Nel caso, invece che $\phi(v_4) = v_1$, si vede con ragionamenti analoghi che $\phi = (14)(36)(25) = \sigma_3$.

Dalla discussione precedente, applicando la simmetria ρ_1 rispetto all'asse diagonale v_1v_6 , si ricava che se ϕ è priva di punti fissi e $\phi(v_1) = v_5$ ($= \rho_1(v_4)$), allora ϕ è uno dei due automorfismi $\rho_1^{-1}\alpha_1\rho_1 = \alpha_2$, $\rho_1^{-1}\sigma_3\rho_1 = \beta_1$.

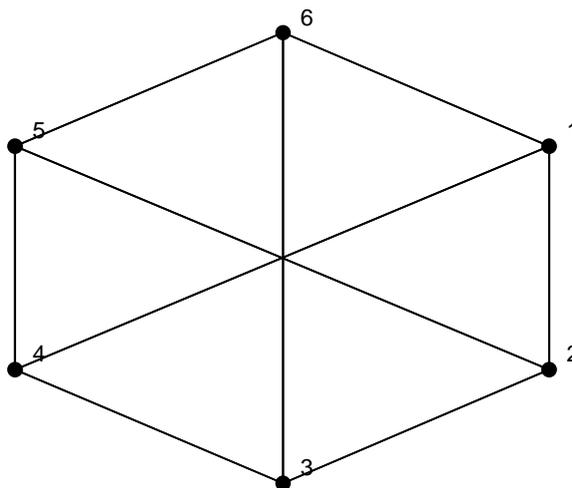
- b-3)** Sia $\phi(v_1) = v_2$. Allora, passando ai vertici opposti, è anche $\phi(v_6) = v_5$. Il vertice v_4 è a distanza 1 da v_1 , quindi $\phi(v_4)$ deve distare 1 da v_2 ,

cioè deve essere $\phi(v_4) = v_6$ (non può essere $\phi(v_4) = v_4$ perchè ϕ non ha punti fissi); passando ai vertici opposti, si ottiene $\phi(v_3) = v_1$; il vertice v_5 è adiacente a v_3 e v_1 , quindi $\phi(v_5)$ è adiacente a v_1 e v_2 , cioè $\phi(v_5) = v_4$. Quindi, in definitiva, $\phi = (465)(312) = \tau_1$.

Come nel caso b-2), anche stavolta, applicando la simmetria ρ_1 alla discussione precedente otteniamo che l'unica simmetria priva di punti fissi che manda v_1 in $v_3 = \rho_1(v_2)$ è $\phi = \rho_1^{-1}\tau_1\rho_1 = \tau_2$.

Dunque, riassumendo: gli automorfismi con punti fissi sono $id, \rho_1, \rho_2, \sigma_1$, mentre quelli senza punti fissi sono $\beta_2, \sigma_2, \alpha_1, \sigma_3, \alpha_2, \beta_1, \tau_1, \tau_2$. Quindi $|Aut(G)| = 12$.

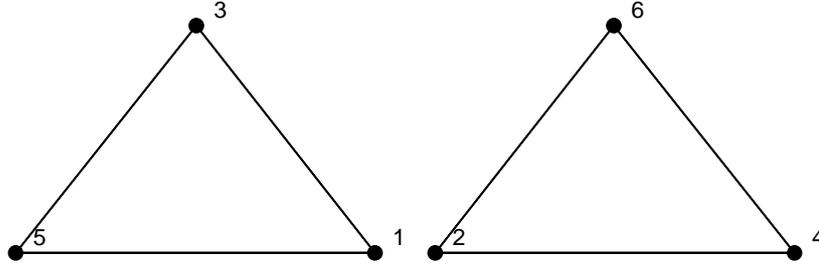
Exercise 4 Sia $G = (V, E)$ il grafo disegnato qui sotto:



determinare $Aut(G)$.

Soluzione. G è il grafo bipartito completo $K_{3,3}$, per cui \overline{G} è l'unione di

2 triangoli disgiunti $T_1 =, T_2 =$:



è chiaro che ci conviene studiare $Aut(\overline{G})$; esso è formato da tutti gli automorfismi ottenuti componendo gli automorfismi di T_1 e gli automorfismi di T_2 , più gli automorfismi della forma $\alpha \times \beta : V \rightarrow V$, con $\alpha \in Iso(T_1, T_2), \beta \in Iso(T_2, T_1)$, dove

$$\alpha \times \beta(v) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \alpha(v), & v \in T_1 \\ \beta(v), & v \in T_2 \end{cases}$$

Ma $|Aut(T_1)| = |Aut(T_2)| = 6$, sicchè le composizioni fra automorfismi dei due triangoli sono $6 \cdot 6 = 36$. Quanto alle simmetrie del tipo $\alpha \times \beta$, il loro numero è $|Iso(T_1, T_2)| \cdot |Iso(T_2, T_1)| = 6 \cdot 6 = 36$ (evidentemente, ogni biezione $T_i \rightarrow T_j$ è un isomorfismo di grafi); dunque, in definitiva, $Aut(G)$ è composto da 72 automorfismi.

Exercise 5 Sia $G = (V, E)$ il grafo dell'esercizio 2. Calcolare il numero totale di 3-, 4- e 5-cicli contenuti in G .

Soluzione. Il numero di triangoli, quadrilateri e pentagoni si calcola con le formule riportate nelle mie note di "Teoria algebrica dei grafi" (v. mia pagina web di dipartimento):

$$\text{numero triangoli} = \frac{1}{6} \text{tr} A^3$$

$$\text{numero quadrangoli} = \frac{1}{8} \text{tr} (A^4 - 2\Delta^2 + \Delta) \quad (8)$$

$$\text{numero pentagoni} = \frac{1}{10} \text{tr} (A^5 - 5A^3\Delta + 5A^3)$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

è la matrice d'adiacenza di G e

$$\Delta = \text{diag}(4, 4, 4, 5, 4, 4, 3)$$

è la matrice diagonale delle valenze. Si tenga conto che

$$\text{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^k, \quad (10)$$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori, tutti reali (ma non necessariamente tutti distinti), della matrice A . Nel nostro caso, come si verifica facilmente con un qualsiasi programma di calcolo numerico, gli autovalori di A sono uguali (con approssimazione di 10^{-4}) a

$$\lambda_1 \approx 4,0585 \quad \lambda_2 \approx 0,9322 \quad \lambda_3 \approx 0,6180$$

$$\lambda_4 \approx -0,1483 \quad \lambda_5 \approx -1,5637 \quad \lambda_6 \approx -1,6180 \quad \lambda_7 \approx -2,2787$$

per cui da (10) si ricava che

$$\text{tr}(A^3) = \lambda_1^3 + \dots + \lambda_7^3 \approx 48,000729... \quad (11)$$

per cui, tenendo conto della (8)₁ e del fatto che il risultato deve essere *un numero intero*, si ricava che

$$\text{numero di triangoli} \approx \frac{1}{6} 48,000729 = 8;$$

in effetti, i triangoli nel grafo sono (v. figura a pag. 3 o, meglio, la versione piana e simmetrica dello stesso grafo alla fine dell'esercizio 7):

$$v_1 v_2 v_3, v_1 v_2 v_5, v_1 v_3 v_4, v_1 v_4 v_5,$$

$$v_2 v_5 v_6, v_3 v_4 v_7, v_4 v_5 v_6, v_4 v_6 v_7$$

Passiamo al calcolo del numero di quadrangoli; per la $(8)_2$ ci serve di conoscere $tr A^4, tr \Delta, tr \Delta^2$. La prima quantità si ottiene sempre dalla (10) per $k = 4$:

$$tr(A^4) = \lambda_1^4 + \dots + \lambda_7^4 \approx 312,0034\dots;$$

le altre due quantità si calcolano immediatamente:

$$tr(\Delta) = \sum_{i=1}^7 \Delta_{ii} = \sum_i d_i = 28$$

$$tr(\Delta^2) = \sum_{i=1}^7 \Delta_{ii}^2 = \sum_i d_i^2 = 114;$$

quindi da $(8)_2$ si ottiene (sempre tenendo conto che il risultato deve essere un numero intero):

$$\text{numero di quadrangoli} \approx \frac{1}{8}(312,0034 - 2 \cdot 114 + 28) = 14;$$

in effetti (v. sempre figura a fine dell'esercizio 7), i quadrangoli contenuti nel grafo sono (per comodità scrivo i invece di v_i):

$$3147, 6547, 3154, 6514, 2145, 2546, 2143, \\ 2673, 2346, 2345, 2641, 2513, 2156, 3746$$

Occupiamoci ora dei 5-cicli in G . Vale

$$tr(A^5) = \lambda_1^5 + \dots + \lambda_7^5 \approx 1020,0206\dots;$$

notiamo che, a differenza dei due casi precedenti, stavolta la $(8)_3$ ci obbliga a calcolare esplicitamente gli elementi diagonali di A^3 , cosa non particolarmente complicata nel nostro caso, dato il basso numero di vertici:

$$diag A^3 = \left\| a_{ii}^{(3)} \right\|_{i=1,\dots,7} = (8, 6, 6, 10, 8, 6, 4);$$

d'altra parte

$$diag \Delta = \|d_i\|_{i=1,\dots,7} = (4, 4, 4, 5, 4, 4, 3);$$

quindi

$$Tr(\Delta A^3) = \sum_{i=1}^7 d_i a_{ii}^{(3)} = 198$$

per cui, applicando la $(8)_3$ e ricordando la (11), si ottiene

$$\begin{aligned} \text{numero pentagoni} &= \frac{1}{10} \text{Tr}(A^5 - 5A^3\Delta + 5A^3) \\ &\approx \frac{1}{10} \cdot 1020,0206 - \frac{1}{2} \cdot 198 + \frac{1}{2} \cdot 48,000729 \quad (12) \\ &= 102 - 99 + 24 = 27; \end{aligned}$$

in effetti, sempre esaminando la figura a fine dell'esercizio 7, si può vedere con un po' di pazienza che i pentagoni sono i tre "auto-simmetrici"

$$13765, 15623, 13465$$

e le dodici coppie di pentagoni mutuamente simmetrici:

$$(12345, 14625), (14562, 14523), (13462, 23465), (13745, 14765)$$

$$(13762, 23765), (13452, 14652), (15462, 15234), (25476, 12374)$$

$$(23476, 23746), (23745, 14762), (14623, 23456), (13764, 37654)$$

Exercise 6 *Dimostrare che un grafo (semplice non orientato) connesso G è isomorfo al suo grafo lineare $L(G)$ se e solo se G è un ciclo.*

Soluzione. Che un ciclo sia isomorfo al suo grafo lineare è di banale verifica, dimostriamo l'inverso. Sia, dunque, $G = (V, E)$, $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, un grafo connesso isomorfo al suo grafo lineare $L(G) = (\tilde{V} = E, \tilde{E})$ (usiamo la stessa notazione dell'esercizio 1). A causa dell'isomorfismo, vale $m = n$. Osserviamo incidentalmente che applicando la formula (1) si ottiene

$$\sum_{i=1}^n d_i^2 = 4n = \underbrace{2^2 + \dots + 2^2}_{n \text{ volte}},$$

da cui segue che G deve avere almeno un vertice di valenza non superiore a 2. Tornando alla dimostrazione del nostro asserto, notiamo che G non può essere un albero (altrimenti sarebbe $m = n - 1$), per cui deve contenere almeno un lato $e \in E$ che non sia un ponte (cioè, tale che $G \setminus e$ sia ancora connesso);

ma allora $G \setminus e$ è un albero (perchè è connesso e ha n vertici ed $n - 1$ lati). Dunque, G si ottiene dall'albero $G \setminus e$ aggiungendo il lato e , per cui G contiene un unico ciclo C avente e fra i suoi lati. Dimostriamo che $G = C$. Infatti, in caso contrario esisterebbe un lato $f \in E$ avente un vertice w in comune con C ma non appartenente a C . Detti allora $g, h \in E$ i due lati di C incidenti con w , tali lati, considerati come vertici in $L(G)$, risulterebbero adiacenti fra loro e con f , cioè esisterebbe in $L(G)$ il triangolo fgh . D'altra parte il grafo lineare $L(C)$, che è un ciclo per quanto detto all'inizio dell'esercizio, è anche un sottografo di $L(G)$ non contenente il "vertice" f . Quindi, $L(G)$ conterrebbe almeno due cicli, il triangolo fgh e il ciclo $L(C)$: ma questo è impossibile, perchè $L(G)$ è isomorfo a G , e quest'ultimo, per quanto già detto, contiene solo un ciclo.

Exercise 7 Sia $G = (V, E)$ il grafo dell'esercizio 2; dire se esso è planare oppure no; in caso affermativo, disegnare una versione piana di G .

Soluzione. L'unica condizione sufficiente per la planarità che voi conosciate è contenuta nel teorema di Kuratowski: G è planare se e solo se non contiene come sottografo $K_5, K_{3,3}$ o qualche loro suddivisione. Sfortunatamente, tale condizione è complicata da verificare, per cui, generalmente, non viene usata come test di planarità (esistono, in letteratura, diversi altri test più efficaci, v. ad esempio http://en.wikipedia.org/wiki/Planar_graph). Osserviamo che, a lezione, abbiamo visto due criteri di *non-planarità*:

- a) Un grafo con $n > 3$ vertici e $m > 3n - 6$ lati è non planare
- b) Un grafo con tutti i vertici di grado maggiore di 5 è non planare.

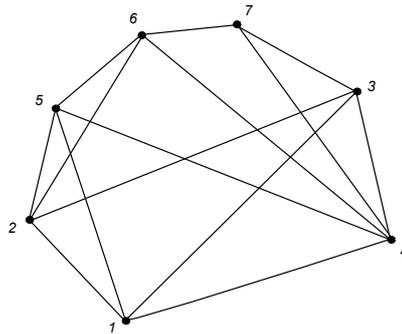
Il criterio b) è chiaramente non applicabile, in quanto il nostro grafo ha almeno un vertice (in effetti, tutti i vertici!) di valenza non superiore a 5. Quanto al criterio a), $n = 7 > 3$, ma $m = 1/2(d_1 + \dots + d_7) = 1/2(4 + 4 + 4 + 5 + 4 + 4 + 3) = 14 < 3n - 6 = 15$; quindi, anche il criterio a) non è applicabile: dunque, non possiamo dedurre che G è non planare.

Per risolvere empiricamente il problema, un metodo può essere quello di ridisegnare il grafo cercando di "spianarlo" il più possibile: si può partire da un ciclo $C \subset G$, cercandone magari uno con molti lati; poi disegnare i vertici di G che non appartengono a C e congiungerli ai vertici di C cercando

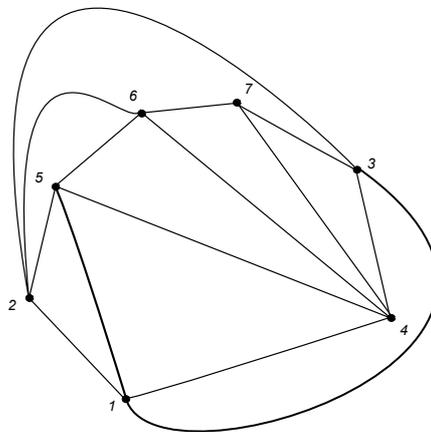
di evitare per quanto possibile le intersezioni;... è chiaro che non si tratta di un vero algoritmo, tuttavia spesso funziona! Applichiamo il "metodo" al nostro grafo. Cominciamo da un ciclo "lungo", per esempio (v. figura di G nell'esercizio 2):

$$C = v_1v_2v_5v_6v_7v_3v_4v_1$$

C comprende tutti i vertici di G , per cui i 7 lati rimanenti di G devono essere corde di C :

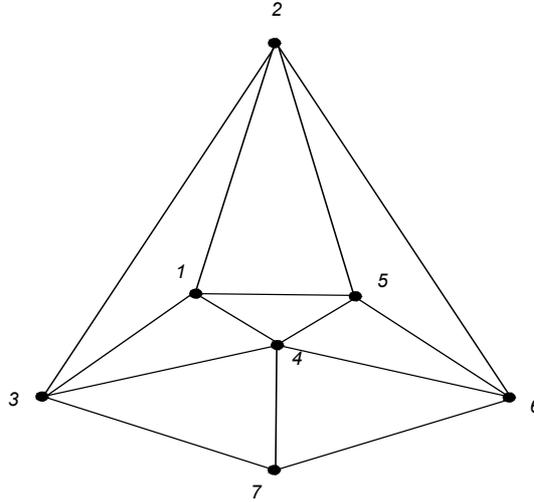


Si tratta ora di ridisegnare, se possibile, le corde di C in modo da eliminare le intersezioni. A questo scopo, osserviamo che le corde $v_1v_5, v_4v_5, v_4v_6, v_4v_7$ non si intersecano (al di fuori dei vertici), quindi restano da ridisegnare le corde v_2v_6, v_1v_3, v_2v_3 :



Si vede, dunque, che G è planare. In effetti, ricordando che $\sigma = (15)(36)$ è l'unica simmetria non banale di G (v. esercizio 2) si può cercare di disegnare G in modo non solo piano, ma anche tale che questa simmetria appaia evidente; a questo scopo, conviene disporre i vertici fissi v_2, v_4, v_7 su uno

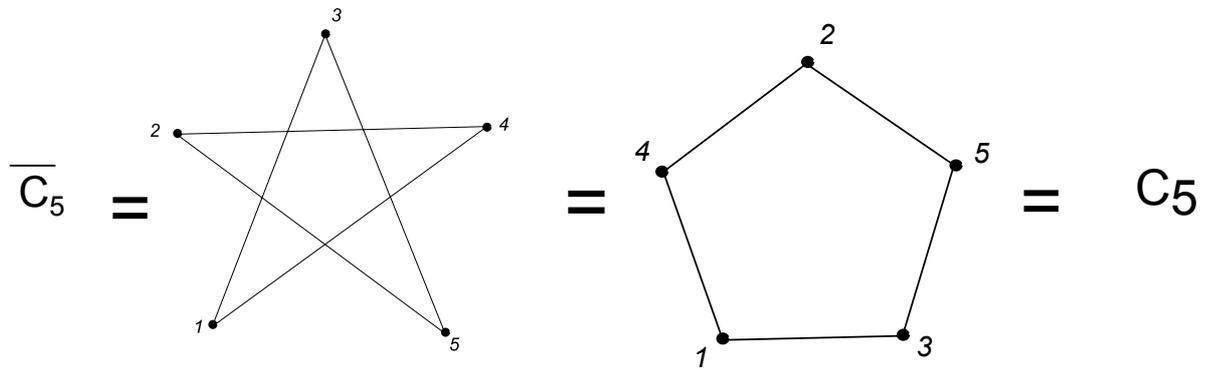
stesso "asse di simmetria" e disporre le coppie v_1, v_5 e v_3, v_6 simmetricamente rispetto a tale asse:



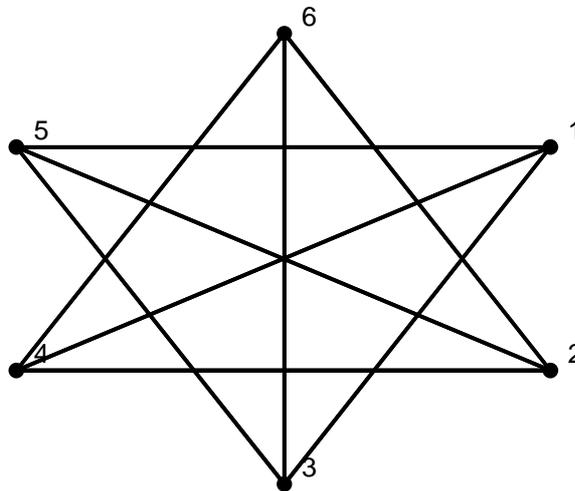
Exercise 8 Detto C_k il ciclo di lunghezza k , e denotato con \overline{G} il complementare di un grafo G , si provi che:

- a) $\overline{C_5}$ è isomorfo a C_5 ;
- b) $\overline{C_6}$ è planare (disegnarne la versione piana);
- c) $\overline{C_n}$ è non planare, per ogni $n \geq 7$;

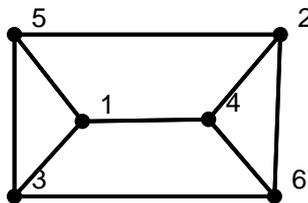
Soluzione. La dimostrazione di a) si riduce all'esame di un disegno: se $C_5 = (1, 2, 3, 4, 5)$, allora



Per quanto riguarda b), notiamo che certamente \overline{C}_6 , il cui disegno è

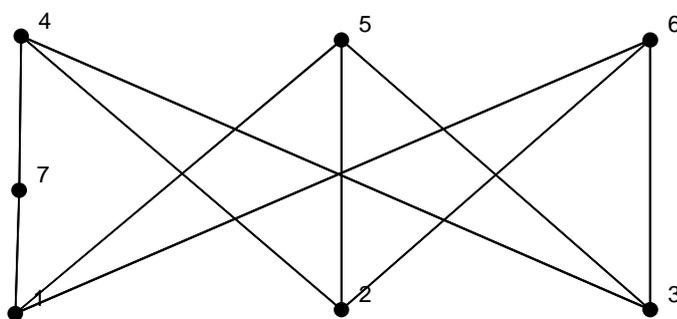


non contiene un sottografo isomorfo al grafo completo K_5 o a una sua suddivisione (infatti, in caso contrario \overline{C}_6 dovrebbe avere almeno 5 vertici di valenza almeno pari a 4, mentre è invece 3-regolare). D'altra parte, \overline{C}_6 non contiene nemmeno il grafo bipartito $K_{3,3}$ o una sua suddivisione: infatti, per contenere una suddivisione dovrebbe avere più di 6 vertici, e d'altro canto non è nemmeno isomorfo a $K_{3,3}$ perchè non contiene alcuna terna di vertici a due a due disgiunti. Un modo rapido e simmetrico di disegnare la versione piana di \overline{C}_6 si ottiene osservando che esso è isomorfo al parallelepipedo di basi triangolari $v_1v_3v_5, v_4v_6v_2$ e con altezze v_1v_4, v_3v_6, v_5v_2 , dopodichè "spianare" il parallelepipedo è immediato:

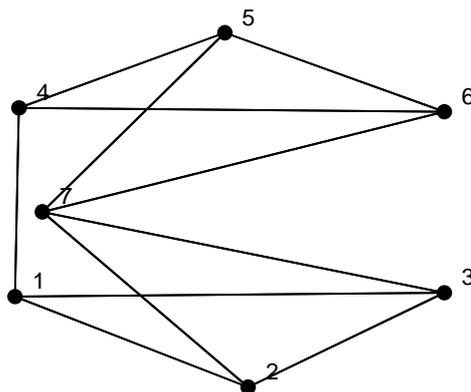


Per quanto riguarda il punto c), osserviamo innanzitutto che è sufficiente dimostrare l'asserto per $n = 7$; i casi successivi seguono per induzione. Supponiamo, infatti che l'asserto sia vero per un certo n . C_{n+1} è la suddivisione di $C_n = v_1 \dots v_n v_1$, ottenuta aggiungendo un vertice v_{n+1} sul lato $v_n v_1$; conseguentemente, $\overline{C_{n+1}}$ ha tutti i lati di $\overline{C_n}$ e, in più, i lati $v_n v_1, v_{n+1} v_2, v_{n+1} v_3, \dots, v_{n+1} v_{n-1}$; in definitiva, $\overline{C_{n+1}} \supset \overline{C_n}$, ed essendo $\overline{C_n}$ non planare per ipotesi d'induzione, lo è anche $\overline{C_{n+1}}$.

Resta da dimostrare che $\overline{C_7}$ è non planare: per farlo, in base al teorema di Kuratowski, sarà sufficiente provare che $\overline{C_7}$ contiene la seguente suddivisione H di $K_{3,3}$:

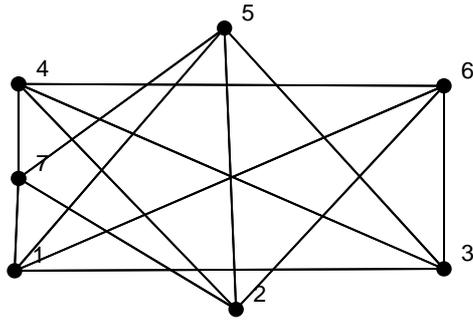


Ma, disegnando il complementare \overline{H} :



ci si rende conto che per ottenere da esso il ciclo $C_7 = v_1v_2v_3v_7v_6v_5v_4v_1$ basta eliminare i lati $v_2v_7, v_5v_7, v_4v_6, v_1v_3$; detto in altri termini, $\overline{C_7}$ è formato da H più i suddetti 4 lati:

$$\overline{C_7} =$$



Exercise 9 Sia $G = (V, E)$ un grafo e sia $\mathcal{F} = \mathcal{F}_G$ lo spazio vettoriale delle funzioni reali definite su V (v. note di teoria algebrica dei grafi sul mio sito dipartimentale). Per ogni $S \subset V$, denotiamo con $\chi_S \in \mathcal{F}$ la funzione caratteristica di S (cioè, χ_S è nulla su $V \setminus S$ e uguale a 1 su S). Denotando con v_1, \dots, v_n i vertici di G , sia $W_i \subset V$ l'insieme dei vertici adiacenti a v_i .

- Trovare sotto quali condizioni i vettori $\chi_{W_1}, \dots, \chi_{W_n}$ formano una base di \mathcal{F} ;
- se $(\chi_{W_1}, \dots, \chi_{W_n})$ è una base di \mathcal{F} , trovare la matrice dell'operatore d'adiacenza di G in tale base (v. le mie note su internet per la definizione di operatore d'adiacenza)
- Dimostrare che la funzione $d \in \mathcal{F}$ che ad ogni vertice associa il suo grado appartiene al sottospazio $\langle \chi_{W_1}, \dots, \chi_{W_n} \rangle$

Soluzione. per il punto a), si tratta di vedere quando $\chi_{W_1}, \dots, \chi_{W_n}$ sono linearmente indipendenti, cioè quando l'equazione

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{W_i} = 0 \tag{13}$$

ammette solo la soluzione banale $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. Ma la (13) equivale al sistema lineare omogeneo

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \chi_{W_i}(v_j) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

il quale ammette solo la soluzione nulla se e solo se la matrice dei coefficienti è non singolare. Ma tale matrice è quella d'adiacenza $A = \|a_{ij}\|$ di G , in quanto (per definizione di funzione caratteristica e dell'insieme W_i) il numero $\chi_{W_i}(v_j)$ è pari a 1 se v_j è adiacente a v_i e a 0 altrimenti, cioè

$$\chi_{W_i}(v_j) = a_{ij} \tag{14}$$

Dunque, in definitiva, le funzioni $\chi_{W_1}, \dots, \chi_{W_n}$ sono linearmente indipendenti se e solo se il determinante di G è non nullo.

Passiamo al punto b). Supponiamo, quindi, per quanto appena detto, che $|A| \neq 0$. Ricordiamo (v. sempre le stesse note su internet) che l'operatore d'adiacenza $\mathcal{A} = \mathcal{A}_G \in \text{End}(\mathcal{F})$ è definito da

$$\mathcal{A}(f)(v) = \sum_{w \sim v} f(w)$$

La matrice $B = \|b_{ij}\|$ che rappresenta l'operatore \mathcal{A} nella base $(\chi_{W_1}, \dots, \chi_{W_n})$ è definita da

$$\mathcal{A}(\chi_{W_j}) = \sum_{i=1}^n b_{ij} \chi_{W_i}, \quad j = 1, \dots, n;$$

analogamente, la matrice A che rappresenta lo stesso operatore nella base "canonica" (χ_1, \dots, χ_n) è definita da

$$A(\chi_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \chi_i, \quad j = 1, \dots, n$$

(ricordiamo che χ_i è la funzione caratteristica di $\{v_i\}$, cioè $\chi_i(v_j) = \delta_{ij}$). D'altra parte, essendo le componenti di ogni $f \in \mathcal{F}$ nella base canonica nient'altro che i valori di f , dalla (14) segue che

$$\chi_{W_i} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \chi_j$$

Quindi