Diseguaglianza di Whitney

F. Pugliese

February 3, 2011

In questa nota dimostriamo una diseguaglianza, dovuta a H. Whitney (1932), che mette in relazione la connettività e la lato-connettività di un grafo connesso.

Prima di tutto, ricordiamo le definizione di connettività. Nel seguito supporremo sempre che i grafi siano finiti, semplici, non orientati.

Definition 1 *Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso. G si dice* k-connesso *se $k < |G|$ ed è connesso il grafo $G - W$, per ogni sottoinsieme $W \subset V$ tale che $|W| < k$*

In altre parole, G è k-connesso se, per sconnetterlo, bisogna togliergli almeno k vertici (e i lati ad essi incidenti, ovviamente). Notiamo che se G è k-connesso, allora è anche h-connesso, per ogni $h < k$.

Definition 2 *Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso. La* connettività *di G è il numero intero*

$$\kappa(G) \stackrel{def}{=} \max\{k \in \mathbb{N} \ \mid \ G \text{ è } k\text{-connesso}\}$$

In altri termini, $\kappa(G)$ è il minimo numero di vertici da togliere a G per sconnetterlo.

Analoghe definizioni valgono quando si tolgono lati invece di vertici.

Definition 3 *Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso. G si dice l-lato-connesso se è connesso il grafo $G - F$, per ogni sottoinsieme $F \subset E$ tale che $|F| < l$*

In altre parole, G è l-lato-connesso se, per sconnetterlo, bisogna togliergli almeno l lati. Anche in questo caso, se G è l-lato-connesso, allora è anche h-lato-connesso, per ogni $h < l$.

Definition 4 *Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso. La lato-connetività di G è il numero intero*

$$\lambda(G) \stackrel{def}{=} \max\{l \in \mathbb{N} \mid G \text{ è } l\text{-lato-connesso}\}$$

In altri termini, $\lambda(G)$ è il minimo numero di lati da togliere a G per sconnetterlo.

Possiamo ora enunciare la dieguaglianza di Whitney. Denotiamo con $\delta(G)$ il grado minimo di un vertice di G.

Theorem 5 *Per ogni grafo connesso $G = (V, E)$ vale*

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$$

Dimostrazione. La seconda diseguaglianza segue immediatamente dal fatto che i lati incidenti a un vertice v di G separano v dagli altri vertici; dunque, per sconnettere G è sufficiente cancellare tali lati, il cui numero è maggiore o uguale a $\delta(G)$.

Passiamo alla prima diseguaglianza. Sia $F \subset E$ tale che $G - F$ sia sconnesso e $|F| = \lambda(G)$. Questo implica, in particolare, che $G - F'$ deve essere *connesso*, per ogni sottoinsieme proprio $F' \subset F$ (in quanto $|F'| < |F| = \lambda(G)$). Vogliamo costruire, a partire da F, un sottoinsieme $W_F \subset V$ tale che: a) $G - W_F$ sia sconnesso (sicchè $\kappa(G) \leq |W_F|$); b) $|W_F| \leq |F| = \lambda(G)$. Per farlo, osserviamo, prima di tutto che vale la seguente proprietà.

Lemma 6 *Per ogni $e \in F$, gli estremi di e devono appartenere a componenti connesse distinte di $G - F$*

Dim. del lemma. Sia $e = z_1 z_2$. Supponiamo, per assurdo, che z_1 e z_2 appartengano ala stessa componente connessa, chiamiamola C, di $G - F$. Allora esisterebbe un cammino $z_1 P z_2$ interamente contenuto in C. Ma allora anche $G - F'$, con $F' = F - \{e\}$, risulterebbe sconnesso! Infatti, essendo $G - F$ sconnesso, esiste una coppia di vertici $a, b \in G$ tali che ogni cammino aSb passa per un lato di F. Se S non passa per e, allora deve passare per un lato di F'. Se invece S passa per e, possiamo sostituire tale lato con P (o col suo cammino inverso) e ottenere così un nuovo cammino $aS'b$: ma S', essendo un cammino da a a b, deve passare per forza attraverso un lato $f \in F'$, e per come è costruito S', tale lato deve appartenere anche al cammino originario S; quindi, in definitiva, ogni cammino da a a b passerebbe per F', cioè $G - F'$ sarebbe sconnesso.

Seguito della dimostrazione del teorema 5. Si possono presentare due casi:

a) Esiste un vertice $v \in G$ che non è incidente con alcun lato di F;

b) Tutti i vertici di G appartengono a lati di F.

Consideriamo dapprima il caso a). Detta C_v la componente connessa di $G - F$ che contiene v, sia W_F l'insieme dei vertici di $G - F$ appartenenti a C_v e incidenti con lati di F. Allora W_F separa v da $G - C_v$ (perchè se z è un vertice in $G - C_v$, allora ogni vz-cammino in G deve intersecare F, e quindi deve contenere almeno un vertice di W_F). Ma per il lemma precedente, ogni lato di F può contenere al più un vertice di W_F (altrimenti avremmo un lato di F con entrambi gli estremi nella stessa componente connessa C_v di $G - F$). Quindi, se $\Phi : W_F \to F$ è un'applicazione tale che $w \in \Phi(w)$ per ogni $w \in W_F$ (applicazione che certamente esiste, per definizione di W_F), allora Φ è iniettiva, per cui $|W_F| \leq |F|$, come volevamo dimostrare.

Passiamo al caso b), quello in cui tutti i vertici di G sono incidenti con lati di F. Distinguiamo due casi: 1) G è un grafo completo; 2) G non è un grafo completo. Nel primo caso, in cui ogni vertice è connesso a ogni altro, è chiaro che $\kappa(G) = \lambda(G) = |G| - 1$. Supponiamo, dunque, G non completo, e fissiamo un vertice $v \in V$ che non sia adiacente a tutti quanti gli altri. Sia $N(v)$ l'insieme dei vertici di G adiacenti a v; mostriamo che $|N(v)| \leq |F|$. In effetti, $N(v) = N_1 \cup N_2$, con $N_1 = \{w \in N(v) \mid vw \in F\}$ e $N_2 = \{w \in N(v) \mid vw \notin F\} = N(v) - N_1$; ma allora, se associo ad ogni $w \in N_1$ il lato $\Phi(w) = vw$ e ad ogni $w \in N_2$ un lato $\Phi(w) \in F$ (che esiste, perchè siamo nel caso b)), otteniamo un'applicazione $\Phi : N(v) \to F$ che, sempre applicando il lemma 6, risulta essere iniettiva: quindi $|N(v)| \leq |F|$. Ma essendo $G - N(v)$ sconnesso (perchè abbiamo supposto esistere vertici non adiacenti a v), il teorema è completamente dimostrato.