Circuiti euleriani

F. Pugliese

April 22, 2011

Abstract

Diamo una dimostrazione *costruttiva* dell'esistenza di circuiti euleriani nei grafi connessi con vertici tutti di grado pari.

Innanzitutto, ricordiamo la definizione di grafo euleriano. Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso (finito, non orientato, semplice). Un *circuito euleriano* in G è una passeggiata chiusa in G tale che ogni lato del grafo compaia in essa una e una sola volta. Un grafo connesso che ammetta almeno un circuito euleriano si dice *grafo euleriano.*

E' ben noto il seguente criterio di "eulerianità".

Theorem 1 *Il grafo $G = (V, E)$ è euleriano se e solo se è connesso e ogni vertice di G ha grado pari*

Proof. Supponiamo che esista un circuito euleriano E in G; allora è ovvio che il grafo è connesso. Inoltre, fissato un vertice $v \in V$, tutti i lati di G contenenti v compaiono in E, ciascuno una sola volta, e per ogni lato entrante in v (secondo il verso di percorrenza di E) c'è un corrispondente lato uscente: dunque, i lati di G incodenti con v si suddividono in coppie "entrata-uscita" e sono quindi in numero pari.

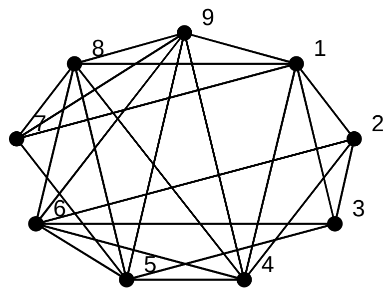
Passiamo all'implicazione inversa, di cui daremo una dimostrazione costruttiva, nel senso che, oltre a dimostrare l'esistenza del circuito euleriano, ne daremo concretamente un metodo di costruzione. Supponiamo, dunque, che G sia connesso e che tutti i suoi vertici abbiano grado pari. Procederemo per induzione sul numero dei lati del grafo: supporremo, cioè, che l'asserto sia vero per tutti i grafi (connessi e con tutte le valenze pari) che abbiano un numero di lati minore di $|E|$: da quest'ipotesi d'induzione dedurremo che l'asserto vale anche per G (la base d'induzione è il caso banale in cui G è un triangolo).

Osserviamo che G non può essere un albero, perchè altrimenti avrebbe almeno una foglia, cioè un vertice di grado dispari; dunque, G contiene almeno un ciclo. Sia $C \subset G$ un tale ciclo. Cancellando da G i lati di C si ottiene un nuovo grafo $G' = G \backslash C = (V, E' = E \backslash E(C))$. Evidentemente, G' ha ancora tutti i vertici di grado pari: precisamente, i vertici che non appartengono a C conservano il grado che avevano in G, mentre per ogni vertice $v \in C$ il grado decresce di 2 (che è il numero di lati di C incidenti con v); in particolare, se v

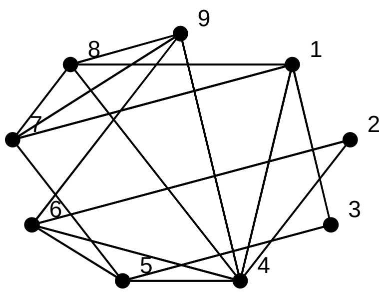
ha grado 2 in G, esso diventerà un vertice isolato di G'. Dunque, in generale, G' si scompone in un certo numero di componenti connesse, alcune delle quali, denotiamole con $H_1, \ldots, H_r$, non si riducono a punti isolati; quindi, per l'ipotesi d'induzione, ciascun H_i contiene un circuito euleriano W_i. Ma allora, si può costruire in G il seguente circuito euleriano: partendo da un vertice qualunque $\overline{v} \in C$, si procede C (in una qualunque delle due possibili direzioni), e ogni volta che si incontra un vertice $v \in H_i \cap C$, si abbandona temporaneamente C per percorrere la passeggiata v$W_i v$, dopodichè si continua il cammino lungo C (nella stessa direzione di prima della deviazione), finchè non ci si imbatte in un altro vertice w appartenente a qualche H_j, si percorre la "deviazione" zW_jz e si continua lungo C, ecc., fino a ritornare al vertice iniziale $\overline{v}$. E' chiaro che, in tal modo, si percorrono tutti i lati di G, ognuno una volta sola. ■

Notiamo che il circuito euleriano su G descritto nella dimostrazione precedente dipende dalla scelta di C. Inoltre, la procedura sopra descritta fornisce un metodo concreto per costruire il circuito euleriano su G, riducendo il problema a quello di costruire dei circuiti euleriani sui grafi più piccoli $H_1, \ldots, H_r$. Vediamo con un esempio come si procede concretamente.

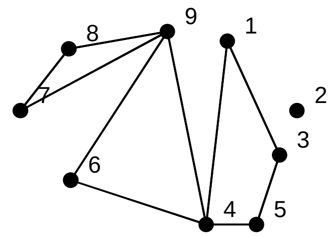
Sia G il grafo in figura:



Come si vede, G è connesso e ha 9 vertici, tutti di grado pari. Cancellando da G il 7-ciclo $C = 1-2-3-6-8-5-9-1$, si ottiene il grafo G':



che è ancora connesso e con i vertici tutti di grado pari. Cancellando da G' il 7-ciclo $C' = 2-6-5-7-1-8-4-2$ si ottiene il grafo G'':



costituito dal vertice isolato 2 e una componente connessa non banale, nella quale è facile individuare a occhio il circuito euleriano $E'' = 9-8-7-9-6-4-5-3-1-4-9$. A questo punto, come nella dimostrazione del teorema 1, procediamo al contrario:

- il circuito euleriano E' in G' si ottiene percorrendo C' e aggiungendo ad esso la "deviazione" E'' (la deviazione si può far cominciare da un vertice qualsiasi di $C' \cap E''$, ad esempio il 6):

  $$E' = 2-6E''6C'2 = 2-6-4-5-3-1-4-9-8-7-9-6-5-7-1-8-4-2$$

- Il circuito euleriano E in G si ottiene percorrendo C e aggiungendovi, a partire da un vertice comune ai due cammini (ad esempio, il vertice 1), la "deviazione" E':

  $$E = 1E'1C1 = 1-4-9-8-7-9-6-5-7-1-8-4-2-6-4-5-$$

  $$-3-1-2-3-6-8-5-9-1$$

Dalla dimostrazione del teorema 1 si ricava la seguente caratterizzazione alternativa dei grafi euleriani.

Theorem 2 *Un grafo $G = (V, E)$ è euleriano se e solo se G è connesso ed esistono dei cicli $C_1, \ldots, C_r \subset G$ tali che:*

$$\begin{aligned} &E(G) = E(C_1) \cup \cdots \cup E(C_r) \\ &E(C_h) \cap E(C_k) = \emptyset \quad \textit{se } h \neq k \end{aligned} \tag{1}$$

In altri termini, un grafo connesso è euleriano se e solo se l'insieme dei suoi lati si può scomporre in un certo numero di cicli, tali che ogni lato di G appartenga a uno e uno solo di essi.

Proof. Sia G euleriano. Allora, secondo quanto visto nella dimostrazione precedente, G contiene un ciclo C_1, e le componenti connesse di $G \backslash C_1$ sono o vertici isolati o grafi connessi euleriani $H_1, \ldots, H_s$; in ciascun H_j esiste un ciclo C_j, e le componenti connesse di $H_j \backslash C'_j$ sono vertici isolati o grafi euleriani, chiamiamoli $H'_{j1}, \ldots, H'_{j,r_j}$; in ciacun H'_{jr} esiste un ciclo C''_{jr}, ecc.... Alla fine di questo procedimento, arriveremo a dei sottografi euleriani che saranno cicli e quindi non saranno ulteriormente scomponibili; è chiaro che la sequenza completa di cicli

$$C_1, \ldots C'_r, \ldots, C''_{rj}, \ldots, ecc.,$$

così ottenuta soddisfa le condizioni (1).

Viceversa, sia G connesso e scomponibile in un certo numero di cicli $C_1, \ldots, C_r$ soddisfacenti le (1). Allora, in maniera del tutto analoga a quanto abbiamo fatto (sulla base della dimostrazione del teorema 1) nell'esempio precedente, possiamo costruire un circuito euleriano in G nel seguente modo. Fissato arbitrariamente un verso di percorrenza su ciascun C_i, si scelgono arbitrariamente un ciclo C_{i_1} e un vertice $v_1 \in C_{i_1}$ da cui partire. Si procede lungo C_{i_1} (nel verso prefissato) fino a raggiungere un vertice $v_{12} \in C_{i_1} \cap C_{i_2}, i_2 \neq i_1$; da v_{12} si comincia a percorrere C_{i_2} (sempre nel verso prefissato), finchè non si presenta una delle due seguenti eventualità:

a) si raggiunge un vertice $v_{23} \in C_{i_2} \cap C_{i_3}, i_3 \notin \{i_1, i_2\}$; in tal caso si lascia C_{i_2} e si comincia a percorrere C_{i_3}

b) se invece C_{i_2} non contiene vertici appartenenti a $C_k, k \notin \{i_1, i_2\}$, si percorre interamente C_{i_2} fino a ritornare in v_{12}, dopodichè si riprende il cammino su C_{i_1} finchè non si raggiunge un vertice $v_{13} \in C_{i_1} \cap C_{i_3}, i_3 \notin \{i_1, i_2\}$

Ecc.... In sostanza, se, a un certo istante, ci si trova sul ciclo C_{i_h}, allora lo si percorre nel verso prefissato fintanto che non si incroci un ciclo "nuovo" $C_{i_k}, k > h$: se lo si incrocia, si passa al nuovo ciclo; se, invece, lungo C_{i_h} si incrociano solo cicli già (parzialmente o totalmente) attraversati, allora si completa il giro di C_{i_h} e si ritorna al ciclo $C_{i_s}, s < h$, che precedeva, nel nostro percorso, l'ingresso in C_{i_h} (a meno che non sia $h = 1$, nel qual caso il nostro circuito euleriano è terminato). ∎

Per esemplificare la precedente costruzione, torniamo al grafo G dell'esempio precedente (prima figura). In quel caso G è si scompone nei 5 cicli:

$$C_1 = 1 - 2 - 3 - 6 - 8 - 5 - 9 - 1,\ C_2 = 2 - 6 - 5 - 7 - 1 - 8 - 4 - 2,$$

$$C_3 = 1 - 3 - 5 - 4 - 1,\ C_4 = 9 - 4 - 6 - 9,\ C_5 = 9 - 7 - 8 - 9$$

(i cicli C_1, C_2 li avevamo già trovati, gli altri tre sono quelli che si vedono nella terza figura). Supponendo di aver orientato i cicli così come li abbiamo scritti, e di prendere come punto di partenza il vertice 1 del ciclo C_1, il lettore può verificare che il circuito euleriano, costruito secondo il procedimento del teorema precedente, è

$$1-\underbrace{\mathbf{2}-6}_{C_2}-\mathbf{5}-4-6-9-7-8-9-4-1-3-5-7-1-8-4-2-3-6-8-5-9-1$$