Università degli Studi Di Salerno

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE NATURALI

Corso di Analisi Matematica
A.A. 2009 / 2010

Le Funzioni

Fabio Memoli

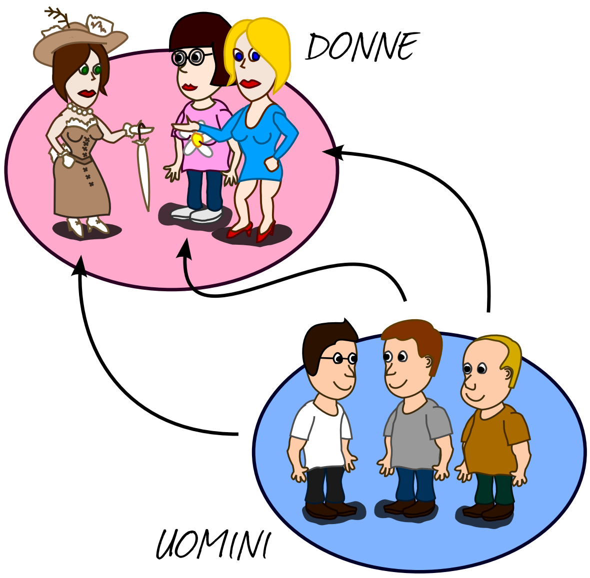
INDICE

Il concetto di *funzione* nasce per descrivere matematicamente quello di *grandezza variabile*. Esempi di grandezza variabili sono: la posizione di un oggetto mobile, o la sua velocità, la temperatura in una stanza, la densità di un oggetto, i prezzi delle merci ecc. Come si può notare il concetto di grandezza variabile mostra che questa coinvolge sempre una relazione tra *due* grandezze: la velocità di un automobile varia al *al variare del tempo*; la densità di un oggetto può variare *da punto a punto*; in altre parole:

l'esistenza di una grandezza variabile sottointende l'esistenza di una relazione tra *due* grandezze (tempo e velocità, posizione e densità ecc.), ovvero la *dipendenza* di una grandezza da un'altra.

Questa dipendenza segue, di volta in volta, una certa *legge* in cui a ciascun numero reale (ingresso) viene associato *univocamente* un altro numero reale (uscita).

Esempio 1. Se X è l'insieme degli uomini e Y l'insieme delle donne. La corrispondenza che associa ad ogni uomo una madre (uomo $\mapsto$ madre) è una funzione da X in Y. La corrispondenza madre $\mapsto$ figlio non è una funzione da X in Y non essendo univoca: *una madre può avere più di un figlio*.



Esempio 2. Se X è l'insieme degli studenti di un certo corso e Y è l'insieme dei loro nomi, la corrispondenza che associa ad ogni studente il suo nome è univoca (mentre il viceversa non è necessariamente vero: potrebbero esserci due studenti con lo stesso nome). In questo caso né X né Y sono insiemi numerici, e tuttavia risulta ben definita una corrispondenza univoca tra questi due insiemi. Si arriva così al concetto di funzione:

Definizione 1. Dati due insiemi X, Y qualsiasi, una *funzione* f di dominio X a valori in Y (o anche "codominio Y") è una qualsiasi legge che ad ogni elemento di X associa uno ed uno solo elemento di Y. Scriveremo

$$f : X \to Y$$

(che si legge "f definita da X in Y"). La scrittura

$$f : x \mapsto f(x)$$

(che si legge "f associa f ad x") indica come f agisce sugli elementi. Il simbolo f indica il valore che la funzione f associa a x, e non va confuso col simbolo f, che denota la funzione stessa. $\square$

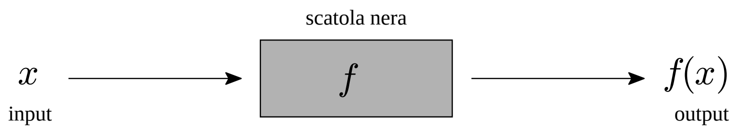
Si usa anche la scrittura

$$y = f(x)$$

per indicare che la variabile y è funzione di x, ossia y è il valore che f associa all'ingresso x.

La proprietà caratteristica di f, affinchè la si possa chiamare funzione, è l'*univocità* della corrispondenza: assegnato l'elemento di "ingresso" $x \in X$, l'elemento di "uscita" $y = f(x)$ dev'essere univocamente determinato.

Si può pensare a una funzione come a una scatola nera che a ogni ingresso ammissibile x associa un'*unica* uscita $f(x)$.



L'uscita corrispondente a x si chiama *immagine di x*; l'insieme delle possibili uscite si chiama *immagine* di D tramite f e si indica con il simbolo $f(D)$ o $\mathrm{Im} f$. Si noti che nella scrittura $f : X \to Y$, il codominio Y può essere più grande dell'immagine $f(X)$ (ossia in generale $f(X) \subseteq Y$). Ad esempio, se f ha valori reali, solitamente si scrive $f : X \to \mathbb{R}$ senza precisare quale sia quale sia l'effettiva immagine di f.

$$\mathrm{Im} f = \{y \in Y \setminus \exists\, x \in X \quad \text{tale che} \quad f(x) = y\}$$

2 FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

2.1 *Generalità*

Le *funzioni reali di variabile reale*, sono le funzioni per cui sia la variabile di "ingresso" che quella di "uscita" sono numeri reali. La funzione ha dunque per *dominio* un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ e per *codominio* $\mathbb{R}$;

$$f : X \to \mathbb{R} \quad \text{con} \quad X \subseteq \mathbb{R}$$

$$f : x \mapsto f(x)$$

La dipendenza $f(x)$ da x si visualizza efficacemente disegnando il *grafico* di f:

$$G(f) = \{(x, y) : x \in X, y = f(x)\}$$

ossia l'insieme dei punti del piano di coordinate (x, y) con

$$y = f(x)$$

e x variabile nel dominio X.

Per le funzioni più comuni, il grafico è una curva, nel senso intuitivo del termine.

La proprietà fondamentale che fa di f una funzione, ossia il fatto che ad ogni ingresso $x \in X$ faccia corrispondere *una ed una sola* uscita $f(x) \in \mathbb{R}$, ha allora il seguente significato geometrico:

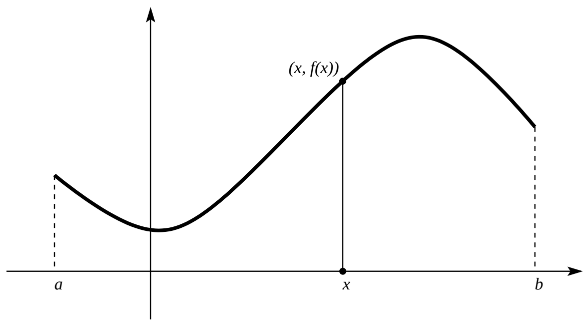


Figura 1: Grafico di una funzione di dominio $D = [a, b]$.

ogni retta parallela all'asse delle ordinate che taglia l'asse delle ascisse in un punto x del dominio X, interseca il grafico di f in uno e un sol punto.

Infatti, se la retta non intersecasse il grafico significherebbe che all'ingresso x non corrisponde alcuna uscita, mentre se lo intersecasse in più di un punto significherebbe che all'ingresso x corrispondono più uscite distinte, cadendo quindi nell'univocità della funzione. (v. fig. 2)

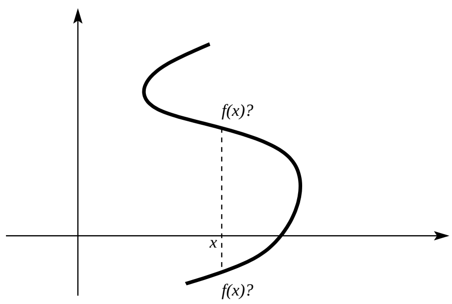


Figura 2: Questa curva non è il grafico di una funzione: all'ingresso x quale uscita $f(x)$ corrisponde?.

Si noti che, invece nulla impedisce che una retta parallela all'asse delle *ascisse* tagli il grafico di f in più punti (o in nessun punto).

2.2 *Funzioni limitate*

Se il grafico di una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ è contenuto nel semipiano inferiore delimitato da una retta parallela all'asse delle ascisse, per esempio di equazione $y = M$, la funzione si dice *limitata superiormente*. Analiticamente significa che

$$f(x) \leqslant M \quad \forall \quad x \in X$$

Analogamente, f si dirà *limitata inferiormente* se il suo grafico è contenuto nel semipiano superiore

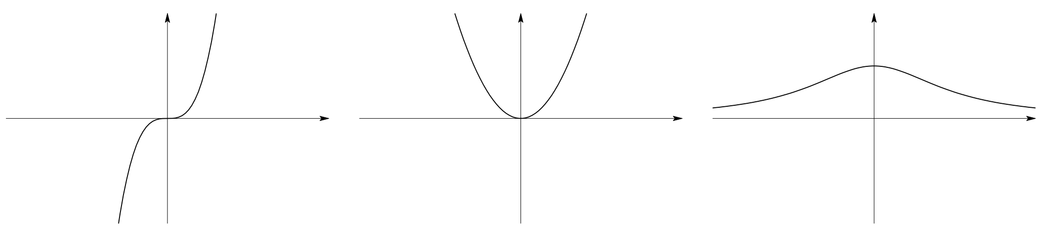
$$f(x) \geqslant m \quad \forall x \in X$$

Una funzione si dirà *limitata* se è limitata sia inferiormente che superiormente. Il grafico di una funzione limitata è contenuto in una striscia orizzontale del piano xy.

Per esempio (v. fig. 3):

- $x \to x^3, x \in \mathbb{R}$, non è limitata né superiormente, né inferiormente.
- $x \to x^2, x \in \mathbb{R}$, è limitata inferiormente; infatti $x^2 \geqslant, \forall x \in \mathbb{R}$.
- $\frac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$ è limitata, poiché $0 < \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Equivalentemente, si può dire che una funzione è limitata superiormente (limitata inferiormente, limitata) se, rispettivamente, la sua *immagine* è un sottinsieme di $\mathbb{R}$ limitato superiormente (limitato inferiormente, limitato).



(a) $x \longmapsto x^3$ non limitata (nè superiormente, nè inferiormente)

(b) $x \longmapsto x^3$ limitata inferiormente

(c) $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ limitata

Figura 3

2.3 *Funzioni simmetriche*

I grafici di alcune funzioni presentano particolari proprietà di simmetria. Per esempio vi sono funzioni il cui grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate. Queste funzioni si chiamano funzioni *pari* e sono caratterizzate dalla relazione

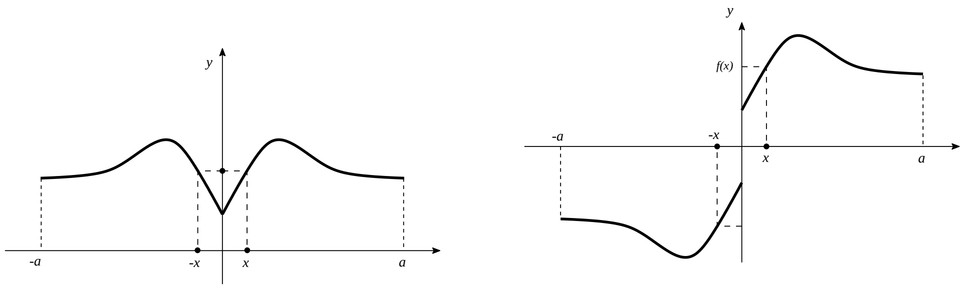
$$f(-x) = f(x)$$

che esprime l'uguaglianza delle ordinate corrispondenti ai punti x e $-x$, simmetrici rispetto alla retta $x = 0$. Funzioni che hanno il grafico simmetrico rispetto all'origine si chiamano *dispari*; anch'esse hanno dominio simmettrico rispetto a $x = 0$ e sono caratterizzate dalla relazione

$$f(-x) = -f(x)$$

Per esempio, la funzione $x \to x^2$ è pari, mentre $x \to x^3$ è dispari.

Più in generale, le potenze a esponente intero sono funzioni pari (dispari) se l'esponente è pari (dispari).



(a) grafico di una funzione *pari* (b) grafico di una funzione *dispari*

Figura 4

Notiamo che una funzione *non può*, invece avere il grafico simmetrico *rispetto all'asse x*; per quanto osservato nel paragrafo 2.1, una curva con tale simmetria non sarebbe il grafico di una funzione, venendo meno all'univocità della corrispondenza.

2.4 *Funzioni monotone*

Una funzione si dice *monotona crescente* se per ogni coppia di punti x_1, x_2 nel dominio di f si ha:

$$x_1 > x_2 \quad \text{implica} \quad f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

Si dice che f è *strettamente crescente* se

$$x_1 > x_2 \quad \text{implica} \quad f(x_1) > f(x_2)$$

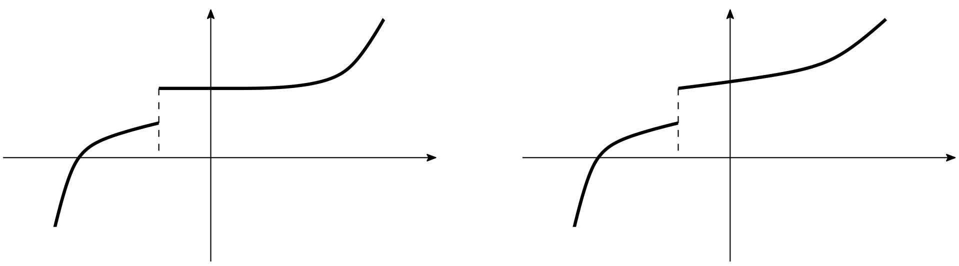
Una funzione si dice *monotona decrescente* se per ogni coppia di punti x_1, x_2 nel dominio di f si ha:

$$x_1 < x_2 \quad \text{implica} \quad f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

Si dice che f è *strettamente decrescente* se

$$x_1 < x_2 \quad \text{implica} \quad f(x_1) < f(x_2)$$

In altri termini: f è crescente (strettamente crescente) se, all'aumentare di x, l'ordinata corrispondente sul grafico non diminuisce (aumenta); f è decrescente



(a) funzione *non decrescente*
(si noti il tratto orizzontale)

(b) funzione *strettamente crescente*

Figura 5

(strettamente decrescente) se, all'aumentare di x, l'odinata corrispondente non aumenta (diminuisce).

Per esempio, $x \to x^3$ è strettamente crescente; la funzione costante $x \to k$ (che ha come grafico la retta di equazione y = k) è sia non decrescente sia non crescente. Tutte queste funzioni (crescenti o decrescenti, strettamente o non si dicono *monotone*).

2.5 *Funzioni periodiche*

La funzione $f : X \to \mathbb{R}$ (non costante) è *periodica* di periodo T, $T > 0$, se T è il più piccolo numero reale positivo tale che

$$f(x+T) = f(x) \quad \text{per ogni} \quad x \in X$$

Ogni intervallo di lunghezza T, contenuto in X si chiama *intervallo di periodicità*. Per conoscere il grafico f su tutto il dominio, basterà disegnare il grafico di f su un qualunque intervallo di periodicità. Tipici esempi di funzioni periodiche sono le funzioni trigonometriche $x \to \sin x$ $(T = 2\pi)$, $x \to \cos x$ $(T = 2\pi)$, $x \to \operatorname{tg} x$ $(T = \pi)$.

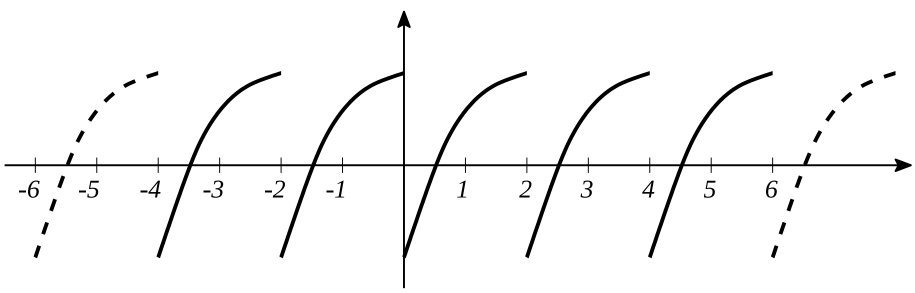


Figura 6: Funzione periodica di periodo 2.

3 FUNZIONI COMPOSTE E INVERSE

3.1 *Funzioni composte*

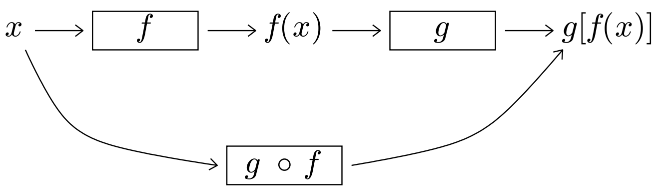
Date due funzioni

$$f : X \to \mathbb{R} \quad g : Y \to \mathbb{R}$$

se $f(X) \subseteq Y$ (cioè se per ogni $x \in X$ si ha che $f(x) \in Y$) si può definire la funzione $h : X \to \mathbb{R}$ *composta di* f e g (nell'ordine), denotata col simbolo $g \circ f$, mediante la formula

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

ossia



Può accadere che risultino ben definite sia la composizione $g \circ f$ che $f \circ g$; ma in generale sarà

$$f \circ g \neq g \circ f$$

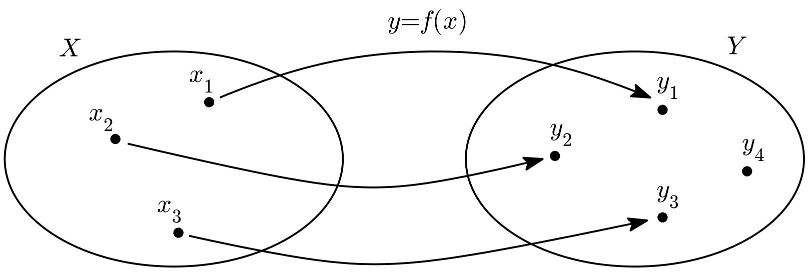
(il prodotto di composizione non è commutativo!). L'operazione di composizione si può estendere a tre o più fattori. Si verifica che se la composizione $(g \circ f) \circ z$ esiste, allora esiste anche $f \circ (g \circ z)$ e sono uguali (proprietà associativa).

$$(f \circ g) \circ z = f \circ (g \circ z)$$

3.2 *Funzioni Iniettive*

Definizione 2. Una funzione si dice **iniettiva** se per ogni elemento del dominio corrisponde un solo elemento del codominio.

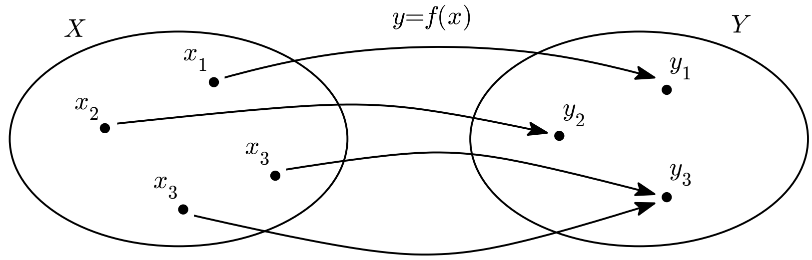
$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$



3.3 *Funzioni Suriettive*

Definizione 3. Una funzione si dice **suriettiva** se per ogni elemento del codominio esiste almeno un corrispondente elemento nel dominio.

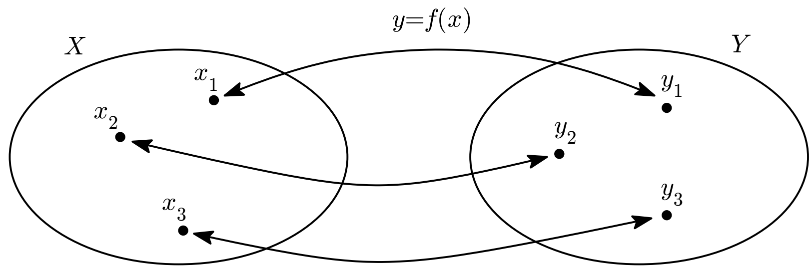
$$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \quad \text{tale che} \quad y = f(x)$$



3.4 *Funzioni Biunivoche*

Definizione 4. Se una funzione f è contemporaneamente **iniettiva** che **surriettiva** da X verso Y si dice **biunivoca**.

Ciò vuol dire che ogni elemento di X corrisponde un solo elemento in Y e non ci sono elementi in Y che non hanno una relazione con gli elementi di X.



Osservazione 1. La surriettività e l'inniettività di una funzione, sono strettamente collegate con la risoluzione delle equazioni.

Sia $f : X \to Y$, fissato $y \in Y$ consideriamo di voler trovare $x \in X$ tale che $f(x) = y$.

se f è surriettiva: l'equazione ammette **almeno una** soluzione;

se f è iniettiva: l'equazione ammette **al massimo** una soluzione;

se f è biunivoca: la soluzione **esiste ed è unica**.

3.5 *Funzioni invertibili; funzioni inverse*

Supponiamo che f abbia come dominio un insieme $X \subseteq \mathbb{R}$. Per ogni ingresso $x \in X$ esiste un'unica uscita $f(x)$. Se succede che per ogni uscita $y \in f(x)$ esiste *un solo* ingresso $x \in X$ tale che $f(x) = y$, allora f si dice *invertibile*, e realizza una corrispondenza biunivoca tra X e $f(x)$. Più formalmente, si dice che $f : X \to \mathbb{R}$ è invertibile in X se vale una delle seguenti condizioni (equivalenti):

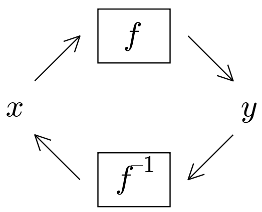
$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$
$$\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$
$$\forall y \in f(X)\ \exists!\ x \in X \quad \text{tale che} \quad f(x) = y$$

Definizione 5. La funzione che associa ad ogni uscita $y \in f(x)$ l'unico ingresso $x \in X$ tale che $f(x) = y$ si chiama *funzione inversa di* f e si indica con il simbolo f^{-1}.

In sintesi

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x \in X \end{cases} \qquad \text{equivale a} \qquad \begin{cases} x = f^{-1}(y) \\ y \in X \end{cases}$$

La scatola nera di f^{-1} lavora a ritroso rispetto a quella di f, secondo lo schema seguente:

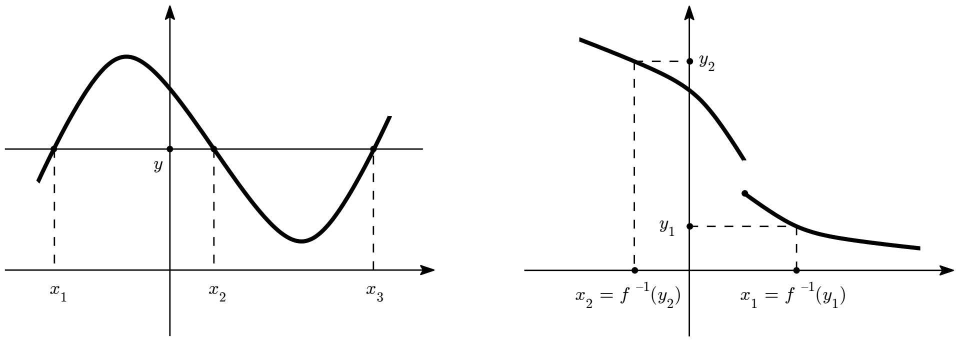


Partire da x e ritornare dopo un giro in x equivale a $f^{-1}[f(x)]) = x$ per ogni $x \in I$; partire da y e tornare in y equivale a $f[f^{-1}] = y$, per ogni $y \in f(I)$.

La condizione di invertibilità equivale a richiedere che il grafico di f sia intersecato al massimo in un punto da *ogni* retta parallela all'asse delle ascisse.

Esempio 1:

La funzione in figura 7a non è invertibile in quanto per il valore y indicato esistono tre punti x_1, x_2, x_3 che hanno immagine y. La funzione in figura 7b è invece invertibile in quanto ogni retta parallela all'asse delle ascisse o non interseca il grafico f o lo interseca esattamente in quel punto.



(a) funzione non invertibile: all'uscita y corrispondono 3 ingressi.

(b) funzione invertibile.

Figura 7

Classi di funzioni che sicuramente *non risultano* invertibili sono: le funzioni simmetriche pari $(f(-x) = f(x))$, le funzioni periodiche $(f(x+T)) = f(x)$.

Esempio 2:

La funzione $f(x) = 3x + 1$ è invertibile; infatti, fissato $y = f(x)$ risulta

$$x = \frac{y-1}{3}$$

La funzione inversa è quindi

$$f(x)^{-1} = \frac{x-1}{3}$$

Esempio 3:

Anche la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è invertibile e risulta

$$f(x)^{-1} = \frac{1}{x}$$

Nota: *è solo un caso che* f *e* f^{-1} *coincidono.*

Esempio 4:

La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

non è invertibile perchè non stabilisce una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $X = \mathbb{R}$ è l'insieme Y costituito dai soli due valori 0,1. Dunque, una funzione $f : X \to Y$ è invertibile se e solo se f è iniettiva, ovvero se f considerata da X su $f(x)$ è biettiva.

Osserviamo invece che:

Teorema 1. *Una funzione* $f : X \to \mathbb{R}$ *strettamente monotona in* X *è invertibile in* X. *Inoltre, la sua inversa è ancora strettamente monotona.*

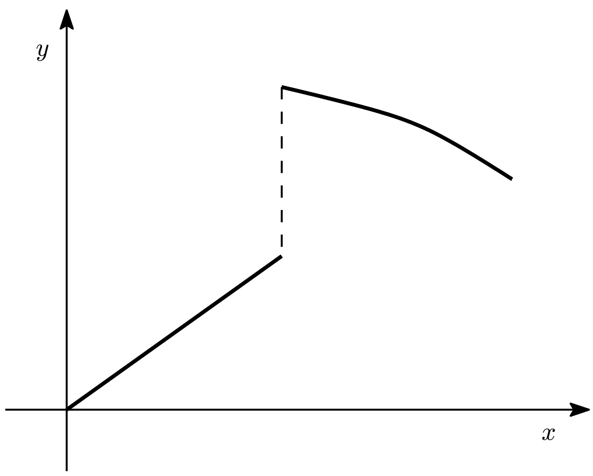
Dimostrazione. Supponiamo che f sia strettamente crescente in X.

Siano $x_1, x_2 \in X$ e proviamo che

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Se $x_1 \neq x_2$, allora o $x_1 < x_2$, oppure $x_1 > x_2$. Per la monotonia stretta di f, nel primo caso si ha $f(x_1) < f(x_2)$; in entrambi i casi $f(x_1) \neq f(x_2)$, perciò f è invertibile. Sia ora $f^{-1}(y)$ la sua funzione inversa, e proviamo che f^{-1} è strettamente crescente. Sia dunque $y_1 < y_2$. Se fosse $x_1 \geqslant x_2$ (dove $x_i = f^{-1}(y_i)$), poiche f è crescente avremmo $y_1 \geqslant y_2$, assurdo; quindi $x_1 < x_2$, ossia $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, e f^{-1} è strettamente crescente. □

Si noti che una funzione può essere invertibile anche senza essere strettamente monotona, come mostra il prossimo esempio:



RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] P. Marcellini and C. Sbordone. *Analisi Matematica Uno.* Liguori Editore, Napoli, 1998.

[2] C. Pagani and S. Salsa. *Analisi Matematica.* Masson Editore, Milano, 1995.