Numeri Complessi

I numeri complessi sono un'estensione dei numeri reali, vengono introdotti affinchè tutte le equazioni algebriche ammettano soluzioni.
Dato l'insieme $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ \ (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ \}$ definiamo per ogni $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ l'operazione d'addizione:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \tag{1}$$

Questa gode delle proprietà associativa, commuativa e distributiva ed esiste l'elemento neutro $(0, 0)$ che è quel numero tale che

$$(a, b) + (0, 0) = (a + 0, b + 0) = (a, b)$$

e un elemnto opposto $(-a, -b)$ infatti

$$(a, b) + (-a, -b) = (a - a, b - b) = (0, 0)$$

allo stesso modo l'operazione prodotto così definita

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \tag{2}$$

è associativa, commutativa e distributiva ed esiste l'elemento neutro $(1, 0)$ tale che

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (a \cdot 1 - b \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 1) = (a, b);$$

Il reciproco di (a, b) è $(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2})$ infatti

$$(a, b) \cdot (\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}) = (\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}, -\frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{ab}{a^2 + b^2}) =$$

$$(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, 0) = (1, 0)$$

$\mathbb{R}^2$ dotato delle operazioni di somma e prodotto definite rispettivamente in (1) e (2) è un campo.
Si definisce $(\mathbb{R}^2, +, *)$ come campo dei numeri complessi e lo si indica con $\mathbb{C}$.
E' inoltre possibile definire una restrizione $\mathbb{C}_0$ di $\mathbb{C}$ con $\mathbb{C}_0 = \{(a, 0) \in \mathbb{R}^2$.
Rispetto alle (1) e (2), $\mathbb{C}_0$ è un campo, in particolare

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0) \in \mathbb{C}_0$$

$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b - 0 \cdot 0, a \cdot 0 + 0 \cdot b) = (a \cdot b, 0) \in \mathbb{C}_0$$

$$(a, 0) < (b, 0) \text{ se } a < b.$$

Se allora mettiamo in corrispondenza biunivoca

$$(a, 0) \in \mathbb{C}_0 \leftrightarrow a \in \mathbb{R}$$

possiamo identificare i numeri reali a con i numeri complessi nella forma (a,0). In questo senso il campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$ è un ampliamento di quello dei numeri reali $\mathbb{R}$.
Considerando ora il numero (0, 1), esso gode di una singolare proprietà

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$$

cioè il suo quadrato coincide col numero reale -1 e per questo (0, 1) è detto 'elemento immaginario' e lo si indica con lo speciale simbolo 'i', detto 'unità immaginaria'.
Un numero complesso quindi può essere espresso in forma algebrica

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) = a + ib$$

a si chiama parte reale, indicata con Re(z) e b parte immaginaria, indicata con Im(z).

$$z = Re(z) + iIm(z).$$

E' possibile rappresentare numeri complessi su un piano cartesiano, in questo contesto chiamato piano complesso o piano di Gauss ove gli assi delle ascisse e delle ordinate rappresentano rispettivamente la parte reale e quella immaginaria del numero complesso. Il complesso coniugato di $z = a + ib$ è $\overline{z} = a - ib$. l'-operazione di coniugio ha le seguenti proprietà rispetto alla somma e al prodotto:

$$\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}$$

$$z \cdot \overline{z} = (a + ib) \cdot (a - ib) = a^2 + b^2 \geq 0$$

Il modulo di $z = a + ib$ è il numero reale non negativo $\sqrt{a^2 + b^2}$ si indica con |z|

e gode delle seguenti proprietà:

1. $$|z| \geq 0 \text{ e } |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

2. $$|z| = |\overline{z}|$$

3. $$|Re(z)| \leq |z| \qquad |Im(z)| \leq |z| \qquad |z| \leq |Re(z)| + |Im(z)|$$

4. $$|z_1 + z_2| \geq |z_1| + |z_2| \text{(disuguaglianza triangolare)}$$

5. $$|z_1 + z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

Geometricamente il modulo di z rappresenta la distanza del punto z dall'origine (utilizza il teorema di pitagora).
I numeri complessi possono anche essere espressi in forma trigonometrica; infatti

$$z = \varrho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\text{dove } \varrho = \sqrt{(a^2 + b^2)}\ ,\ \cos\theta = \frac{a}{\varrho} \text{ e } \sin\theta = \frac{b}{\varrho}$$

Le potenze di numeri complessi espressi in forma algebrica posso essere calcolate utilizzando la formula di De Moivre:

$$z^n = \varrho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

Dato un numero complesso w, diremo che z è una radice n-esima (complessa) di w se risulta $z^n = w$. Pertanto ogni numero complesso possiede n radici n-esime:

$$z_k = \varrho^{\frac{1}{n}}[\cos(\frac{\theta + 2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta + 2k\pi}{n})] \text{per k = 0 .... n-1}$$

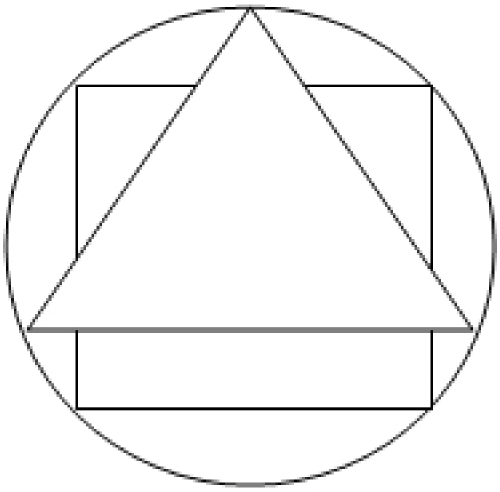
Successioni

Una successione è una legge che ad ogni numero naturale n fa corrispondere uno ed un solo numero reale a_n.

Possiamo dire dunque che una successione è una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$. Indichiamo una succesione con il simbolo di a_no per esteso con

$$a_1, a_2, a_3 ....a_n$$

Dal concetto essenziale di limite consideriamo un metodo che ci permette di calcolare l'area di un cerchio, simile al metodo che Archimede usò nel III secolo a.C., si tratta di approssimare un cerchio di raggio 1 con figure che variano di poco dal cerchio e di cui sia possibile calcolare l'area, cioè per $n \geq 3$ consideraiamo P_n un poligono regolare di n lati iscritto al cerchio di raggio 1. Per n=3 consideriamo un triangolo equilatero, $n = 4$ un quadrato, e così via...



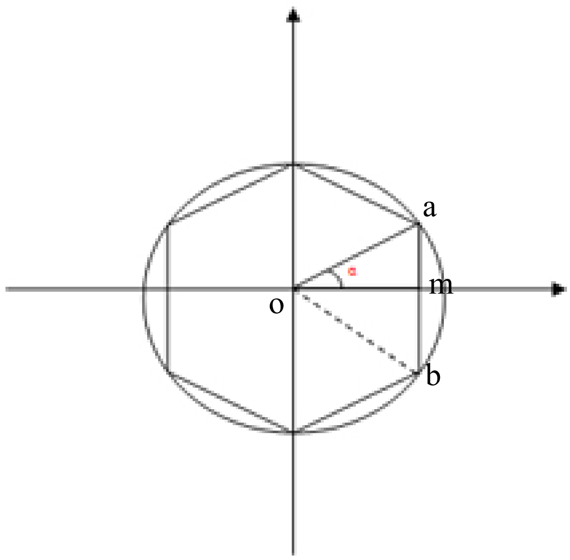
L'area di tale cerchio equivale a $r^2\pi = \pi \text{con} r = 1$; con n abbastanza grande abbiamo:

$$a_n = A(P_n) = \pi$$

esprimendo questa quantità con l'ausilio dei limiti otteniamo:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \pi \text{ e } \lim_{n \to \infty} A(Pn) = \pi$$

Dato che i cateti del triangolo rettangolo AOM in figura misurano $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$ la sua area sarà equivalente a



$$\frac{(\cos\alpha \cdot \sin\alpha)}{2}$$

dunque l'area del poligono P_n sarà uguale a

$$n \cdot \widehat{aob} = n \cdot 2\widehat{aom} = \frac{n}{2} \cdot 2\cos\alpha \cdot \sin\alpha = \frac{n}{2} \cdot \sin 2\alpha = \frac{n}{2} \cdot \frac{\sin(2\pi)}{n}$$

Al variare di n otteniamo per a_n i valori riportati nella seguente tabella:

n	3	4	6	8	12	20	50	100	200
a_n	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	2	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$2\sqrt{2}$	3	3,09	3,133	3,139	3,1410

Come si può notare dalla tabella per n grande i valori di a_n si avvicinano a π.

Se avesse un senso potremmo condiderare l'ultimo termine della successione a_n, però ciò non ha senso in quanto una successione è infinita. Ciò a cui dobbiamo prestare maggiore attenzione è il limite della successione a_n.

Definizione: Un numero reale a è il limite della successione a_n(si dice che a_n tende o converge ad a) e si scrive:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

se qualunque sia $\epsilon > 0$ esiste un numero v t.c. $a - \epsilon < a_n < a + \epsilon$ per ogni $n > v$.