<u>Studio della convergenza delle seguenti serie numeriche</u>

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+3}{2n^3+2n+2}$$

Condizione necessaria (ma non suffic.) affinché una serie converga è che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n+3}{2n^3+2n+2} = 0$$

La condizione necessaria non ci dà informazioni.

Ora poiché il termine generale della nostra serie è asintotico con la serie armonica generalizzata $\frac{1}{n^\alpha}$, cioè: $\quad \frac{n+3}{2n^3+2n+2} \sim \frac{1}{n^2}$

$$\frac{1}{n^2} \to converge \Longrightarrow \quad \frac{n+3}{2n^3+2n+2} \to converge$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

La condizione necessaria non ci dà informazioni, quindi per studiare il comportamento della serie uso il "Criterio del Rapporto", cioè:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} < 1 \ \ converge \\ > 1 \ \ diverge \\ = 1 \ indefinito \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n!\,(n+1)}}{(n+1)^n \cancel{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e} = \frac{1}{e} < 1 \to converge$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{n + 2}{n^2 + 4}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{n + 2}{n^2 + 4}\right) = 1$$

Si nota che la condizione necessaria non è soddisfatta, quindi la serie diverge.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n + 2}{n^3 + 4}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{n + 2}{n^3 + 4}\right) = 0$$

La condizione necessaria non ci dà informazioni.

Per studiare il carattere della serie, ricorro al limite notevole:

$$\lim_{f(x)\to 0} \frac{\sin[f(x)]}{f(x)} = 1$$

Questo significa che $\sin[f(x)] \sim f(x)$, quindi:

$$\sin\left(\frac{n + 2}{n^3 + 4}\right) \sim \frac{n + 2}{n^3 + 4} \quad \text{ma} \quad \frac{n + 2}{n^3 + 4} \sim \frac{1}{n^2} \to converge, \text{quindi}$$

$$\sin\left(\frac{n + 2}{n^3 + 4}\right) \to converge$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 - n}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 - n}} = 0$$

La condizione necessaria non ci dà informazioni.

Si nota che il termine generale della serie, è asintotico alla serie geometrica generalizzata $\frac{1}{n^{\alpha}}$, con $\alpha = \frac{3}{2}$, quindi;

$$\frac{1}{\sqrt{n^3 - n}} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \to converge \implies \frac{1}{\sqrt{n^3 - n}} \to converge$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + 1}{3^n + n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{2^n + 1}{3^n + n} = 0$$

La condizione necessaria non ci dà informazioni.

Si nota che il termine generale della nostra serie è asintotico alla serie geometrica di ragione $\frac{2}{3} < 1$, che $converge$,quindi:

$$\frac{2^n + 1}{3^n + n} \sim \left(\frac{2}{3}\right)^n \to converge \implies \frac{2^n + 1}{3^n + n} \to converge$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^2} = 0$$

La condizione necessaria non ci dà informazioni.

Per studiare il comportamento della serie si ricorre al “Criterio degli Integrali”:

Se f : [1,+∞]->R è una funzione non negativa, decrescente e infinitesima per x->+∞, allora:

$$\sum f(x) = \begin{cases} converge\ se \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx < +\infty \\ diverge\ se \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx \to +\infty \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t f(x)dx$$

La nostra $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$ e si nota che è una funzione non negativa, ed è infinitesima per $x \to +\infty$. Proviamo che è decrescente. Per studiare la decrescenza studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x) = \frac{x^2 \cdot \frac{1}{x} - \log x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x(1-2logx)}{x^4} < 0$$

La soluzione di questa disequazione è $x > e^{\frac{1}{2}}$, quindi la mia funzione è decrescente e posso applicare il Criterio degli Integrali, risolvendo l’integrale per parti:

$$\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{\log x}{x^2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \left[\left(\frac{\log x}{x}\right)_1^t + \int_1^t \frac{D(\log x)}{x}\,dx\right] =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \left[\left(\frac{\log x}{x}\right)_1^t + \int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx\right] = \lim_{t\to+\infty} \left[\left(\frac{\log x}{x}\right)_1^t + \left(-\frac{1}{x}\right)_1^t\right] =$$

$$\lim_{t\to+\infty} \left[\left(\frac{\log t}{t} - (\log 1)\right) - \left(\frac{1}{t} - 1\right)\right] = 1 \to converge$$
