

STUDIO DEL GRAFICO DI UNA FUNZIONE

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 3}$$

1 INSIEME DI DEFINIZIONE

Poiché si sta considerando una funzione razionale fratta, si pone il denominatore diverso da zero, cioè

$$x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$$

$$\text{I.D: } \forall x \in \mathbb{R} - \{-3\}$$

2 INTERSEZIONI CON GLI ASSI

2.1 Intersezione con l'asse x

$$\begin{cases} y = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 3x + 2 = 0 \end{cases}$$

l'equazione $x^2 + 3x + 2 = 0$ ammette due soluzioni reali e distinte: -2 e -1 .

Abbiamo così ricavato i punti in cui la funzione interseca l'asse x:

$$A \equiv (-2, 0) \quad B \equiv (-1, 0)$$

2.2 Intersezione con l'asse y

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Abbiamo così ricavato il punto (che chiameremo C) in cui la funzione interseca l'asse y.

$$C \equiv \left(0, \frac{2}{3}\right)$$

3 STUDIO DEL SEGNO

$$\begin{aligned} f(x) \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 3} \geq 0 \\ \begin{cases} x^2 + 3x + 2 \geq 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} &\cup \begin{cases} x^2 + 3x + 2 \leq 0 \\ x + 3 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq -2, x \geq -1 \\ x > -3 \end{cases} &\cup \begin{cases} -2 \leq x \leq -1 \\ x + 3 < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

L'unione delle soluzioni della disequazione $f(x) \geq 0$ è data dall'unione dei grafici dei due sistemi 1a e 1b.

$$-3 \leq x \leq -2, \quad x \geq -1$$

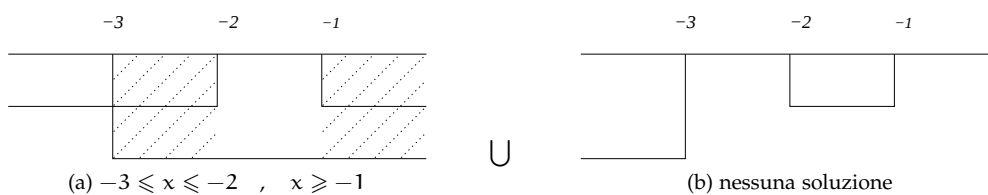


Figura 1

4 COMPORTAMENTO AGLI ESTREMI DEL DOMINIO

4.1 Asintoti verticali

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 3} = +\infty \quad \text{asintoto verticale a destra}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 3} = -\infty \quad \text{asintoto verticale a sinistra}$$

4.2 Asintoti orizzontali

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 3} = +\infty \quad \nexists \text{ asintoto orizzontale a destra}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 3} = -\infty \quad \nexists \text{ asintoto orizzontale a sinistra}$$

Se non esistono asintoti orizzontali ci si chiede se esiste un asintoto obliquo.

5 VERIFICA DELL'ASINTOTO OBLIQUO.

$$m \equiv \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 + 3x + 2}{x + 3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 3x} = 1$$

$$q \equiv \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 3} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x + 2 - x^2 - 3x}{x + 3} = 0$$

L'equazione della retta è $y = mx + q$, dunque, l'equazione dell'asintoto obliquo risulta essere

$$y = x$$

6 CRESCENZA E DECRESCENZA

Il calcolo della derivata prima serve per determinare gli intervalli in cui la funzione cresce o decresce, e per individuare i probabili punti di massimo e minimo relativi.

6.1 Calcolo della derivata prima

$$\begin{aligned}
 f(x)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2} \\
 &= \frac{[D(x^2 + 3x + 2)(x + 3)] - [(x^2 + 3x + 2)D(x + 3)]}{(x + 3)^2} \\
 &= \frac{(2x + 3) \cdot (x + 3) - (x^2 + 3x + 2)}{(x + 3)^2} \\
 &= \frac{2x^2 + 6x + 3x + 9 - x^2 - 3x - 2}{x^2 + 6x + 9} \\
 &= \frac{x^2 + 6x + 7}{x^2 + 6x + 9}
 \end{aligned}$$

6.2 Calcolo dei punti stazionari

Si calcolano i *punti stazionari* della funzione, ovvero i punti in cui f è continua ma non derivabile.

$$f(x)' = 0$$

$$\frac{x^2 + 6x + 7}{x^2 + 6x + 9} = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 7 = 0$$

Le soluzioni dell'equazione sono: $x_1 \equiv \frac{-6-\sqrt{8}}{2}$ e $x_2 \equiv \frac{-6+\sqrt{8}}{2}$.

Chiameremo D e E i punti in cui la derivata si annulla e le loro coordinate sono:

$$D \equiv (-4.4, -5.8) \quad E \equiv (-1.5, -0.1)$$

6.3 Ricerca dei massimi e minimi

$$\begin{aligned}
 f'(x) \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 6x + 7}{x^2 + 6x + 9} \geq 0 \\
 \begin{cases} x^2 + 6x + 7 \geq 0 \\ x^2 + 6x + 9 > 0 \end{cases} &\cup \begin{cases} x^2 + 6x + 7 \leq 0 \\ x^2 + 6x + 9 < 0 \end{cases} \\
 \begin{cases} x \leq \frac{-6-\sqrt{8}}{2} = 0, x \geq \frac{-6+\sqrt{8}}{2} = 0 \\ x > -3 \end{cases} &\cup \begin{cases} \frac{-6-\sqrt{8}}{2} \leq x \leq \frac{-6+\sqrt{8}}{2} \\ x < -3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

I punti in cui la funzione è crescente sono dati dall'unione dei grafici due sistemi 2a e 2b.

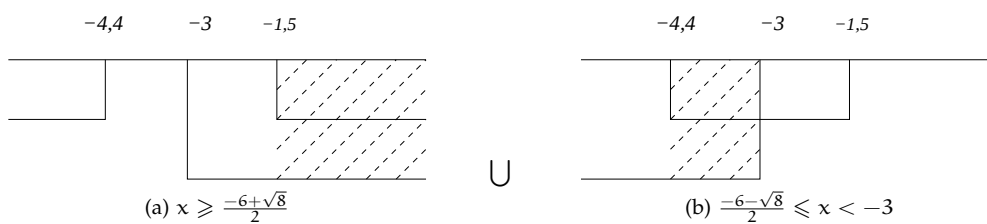


Figura 2: Massimi e minimi

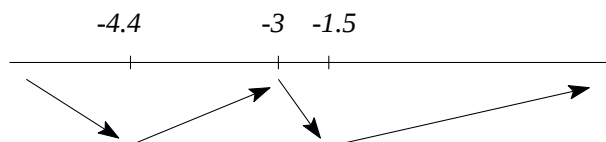


Figura 3: Unione dei sistemi

7 CONCAVITÀ E CONVESSITÀ

Per determinare gli intervalli in cui la funzione è concava o convessa ci serve calcolare la derivata seconda.

7.1 Calcolo della derivata seconda

$$\begin{aligned}
 f(x)'' &= \frac{(2x+6)(x^2+6x+9) - [(x^2+6x+7)(2x+6)]}{(x^2+6x+9)^2} \\
 &= \frac{2x^3 + 12x^2 + 18x + 6x^2 + 36x + 54 - 2x^3 - 6x^2 - 12x^2 - 36x - 14x - 42}{(x^2+6x+9)^2} \\
 &= \frac{4x+12}{(x^2+6x+9)^2}
 \end{aligned}$$

7.2 Punto di flesso

Calcoliamo il punto di flesso ovvero il punto in cui la curva cambia la sua monotonia.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x+12}{(x^2+6x+9)^2} = 0 \Rightarrow x = -3 \quad \nexists \text{ punti di flesso}$$

7.3 Convessità

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{4x+12}{(x^2+6x+9)^2} > 0$$

$$\begin{cases} x > -3 \\ (x^2+6x+9)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \cup \begin{cases} x < -3 \\ (x^2+6x+9)^2 < 0 \end{cases} \quad \nexists \text{ soluzioni}$$

La funzione risulta essere convessa per le x comprese nell'intervallo $] -3, +\infty[$.

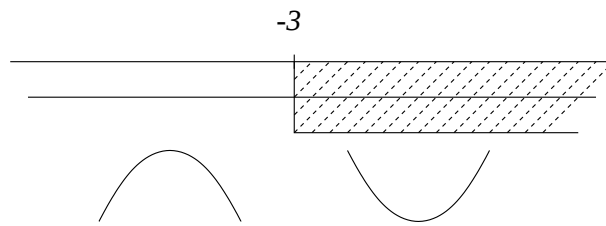


Figura 4: Convessità e concavità

7.4 Concavità

Di conseguenza la funzione risulta essere concava nell'intervallo $]-\infty, -3[$.
(v.fig. 4)

8 DISEGNO DEL GRAFICO DELLA FUNZIONE

