Disegnare il grafico della seguente funzione:

$$f(x) = x^3 \log|x|$$

1) Insieme di definizione

$$|x| > 0 \to x \neq 0 = \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

2) Studio della simmetria
La funzione in esame è dispari essendo $-f(x) = f(-x)$. E' quindi possibile limitarne lo studio in $]0, +\infty[$.

3) Segno della funzione

$$x^3 \log|x| = 0 \Leftrightarrow \log|x| = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$
$$x^3 \log|x| > 0 \Leftrightarrow \log|x| > 0 \Leftrightarrow x < -1 \wedge x > 1$$

4) Asintoti verticali

$$\lim_{x \to 0} x^3 \log|x| = 0$$

5) Asintoti orizzonali

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 \log|x| = +\infty$$

Essendo la funzione dispari il limite a $-\infty$ è pari a $-\infty$

6) Asintoti obliqui

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 \log|x|}{x} = +\infty$$

Non esistono asintoti obliqui

7) Crescenza e decrescenza

$$f'(x) = 3x^2 \log x + \frac{x^3}{x} = x^2(3\log x + 1)$$
$$x^2(3\log x + 1) > 0 \to 3\log x + 1 > 0 \to x > e^{-}\frac{1}{3}$$

Data la simmetria, la funzione risulta crescente in $] - \infty, -e^{-\frac{1}{3}}[$, decrescente in $] - e^{-\frac{1}{3}}, e^{-\frac{1}{3}}[$, crescente in $]e^{-\frac{1}{3}}, +\infty[$.
$f(-e^{-\frac{1}{3}})$ è un punto di massimo relativo; $f(e^{-\frac{1}{3}})$ è un punto di minimo relativo.

8) Concavità, convessità e punti di flesso

$$f''(x) = 6\log x + 2$$

$$6 \log x + 2 = 0 \to \log x + 2 = 0 \to x = e^-2$$

$f(x)$ convessa per $x > 1$ e $0 < x < e^-2$. $f''(x) < 0$ solo per $x > e^-2$, la funzione risulta quindi concava per tali valori.