

Studio del grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{5x^2 + x}$$

Insieme di definizione

Siamo in presenza di una funzione razionale fratta, quindi per determinare l'insieme di definizione dobbiamo imporre che il denominatore sia diverso da zero:

$$5x^2 + x \neq 0 \Leftrightarrow x(5x + 1) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ e } x \neq -\frac{1}{5}$$

La funzione è dunque definita per $x \in (-\infty, -\frac{1}{5}) \cup (-\frac{1}{5}, 0) \cup (0, +\infty)$

Segno della funzione

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \pm \sqrt{4} \Leftrightarrow x = -3 \text{ e } x = 1$$

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 3}{5x^2 + x} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 > 0 \\ 5x^2 + x > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 + 2x - 3 < 0 \\ 5x^2 + x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\begin{cases} x < -3; x > 1 \\ x < -\frac{1}{5}; x > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} -3 < x < 1 \\ -\frac{1}{5} < x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < -3; x > 1 \cup -\frac{1}{5} < x < 0 \Leftrightarrow \\ &\forall x \in (-\infty, -3) \cup \left(-\frac{1}{5}, 0\right) \cup (1, +\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) < 0 &\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 3}{5x^2 + x} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 > 0 \\ 5x^2 + x < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 + 2x - 3 < 0 \\ 5x^2 + x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\begin{cases} x < -3; x > 1 \\ x - \frac{1}{5} < x < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} -3 < x < 1 \\ x < -\frac{1}{5}; x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < x < -\frac{1}{5} \cup 0 < x < 1 \Leftrightarrow \\ &\forall x \in \left(-3, -\frac{1}{5}\right) \cup (0, 1) \end{aligned}$$

Andamento agli estremi del dominio

Per determinare eventuali asintoti calcoliamo i limiti agli estremi degli intervalli di definizione.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{5x^2 + x} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{5x^2 + x} = \frac{1}{5}$$

La retta $y = \frac{1}{5}$ è dunque un asintoto orizzontale per $f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{5}^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{5x^2 + x} = \frac{-\frac{84}{25}}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{5}^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{5x^2 + x} = \frac{-\frac{84}{25}}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 2x - 3}{5x^2 + x} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{5x^2 + x} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

Le rette $x = -\frac{1}{5}$ e $x = 0$ risultano essere asintoti verticali per $f(x)$.

Massimi e minimi. Crescenza e decrescenza

Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{(2x + 2)(5x^2 + x) - (10x + 1)(x^2 + 2x - 3)}{(5x^2 + x)^2} =$$

$$\frac{10x^3 + 2x^2 + 10x^2 + 2x - 10x^3 - 20x^2 + 30x - x^2 - 2x + 3}{(5x^2 + x)^2} = \frac{-9x^2 + 30x + 3}{(5x^2 + x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -9x^2 + 30x + 3 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{28}}{3}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -9x^2 + 30x + 3 > 0 \Leftrightarrow \frac{5 - \sqrt{28}}{3} < x < \frac{5 + \sqrt{28}}{3}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow -9x^2 + 30x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{5 - \sqrt{28}}{3} \text{ e } x > \frac{5 + \sqrt{28}}{3}$$

La funzione risulta essere crescente nell'intervallo $\left(\frac{5 - \sqrt{28}}{3}, \frac{5 + \sqrt{28}}{3}\right)$ e decrescente nell'intervallo $\left(+\infty, \frac{5 - \sqrt{28}}{3}\right) \cup \left(\frac{5 + \sqrt{28}}{3}, +\infty\right)$.

Il punto $x = \frac{5 - \sqrt{28}}{3}$ è un punto di minimo, mentre il punto $x = \frac{5 + \sqrt{28}}{3}$ è un punto di massimo.

Concavità, convessità e flessi

Per stabilire se la funzione è concava o convessa e per determinare eventuali flessi calcoliamo la derivata seconda:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(-18x + 30)(5x^2 + x)^2 - 2(5x^2 + x)(10x + 1)(-9x^2 + 30x + 3)}{(5x^2 + x)^4} = \\ &= \frac{-90x^3 - 18x^2 + 150x^2 + 30x + 180x^3 - 600x^2 - 60x + 18x^2 - 60x - 6}{(5x^2 + x)^3} = \\ &= \frac{90x^3 - 450x^2 - 90x - 6}{(5x^2 + x)^3} = \frac{6(15x^3 - 75x^2 - 6x - 1)}{(5x^2 + x)^3} \\ f''(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{6(15x^3 - 75x^2 - 6x - 1)}{(5x^2 + x)^3} = 0 \Leftrightarrow x = 5.19 \end{aligned}$$

La funzione presenta un punto di flesso in $x = 5.19$

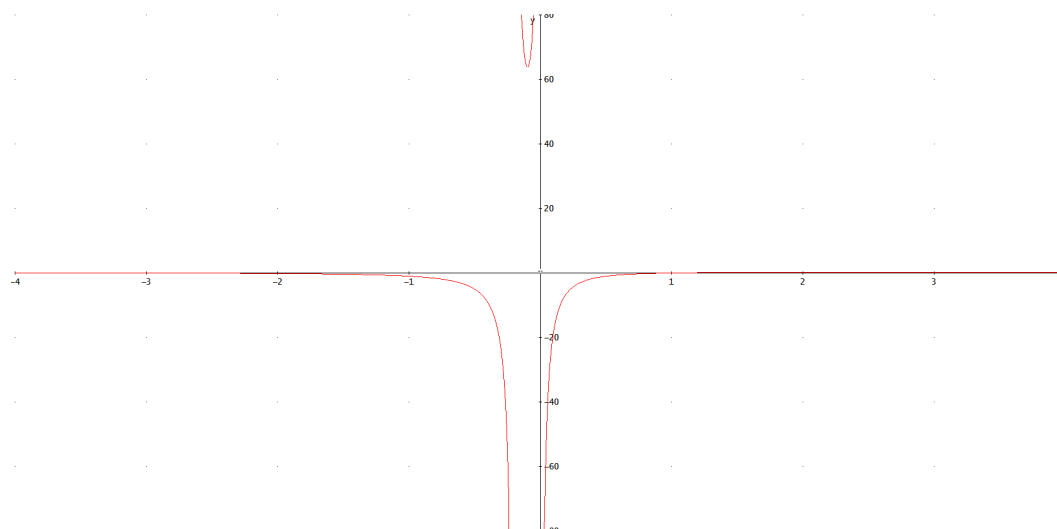
$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{6(15x^3 - 75x^2 - 6x - 1)}{(5x^2 + x)^3} > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{5} < x < 0 \cup x > 5.19$$

La funzione risulta convessa per $x \in \left(-\frac{1}{5}, 0\right) \cup (5.19, +\infty)$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{6(15x^3 - 75x^2 - 6x - 1)}{(5x^2 + x)^3} < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{5} \cup 0 < x < 5.19$$

La funzione risulta concava per $x < -\frac{1}{5} \cup 0 < x < 5.19$

Grafico della funzione



Di seguito un ingrandimento del grafico che evidenzia il punto di flesso:

