Studio del grafico della funzione

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$$

1. Insieme di De inizione

   Poiché sto considerando una funzione razionale fratta, devo porre il denominatore diverso da zero, cioè:

   $1 - x \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 1$

   $\mathrm{I.D.:} \quad \mathrm{X} = \mathbb{R} - \{1\}$

   $\mathrm{I.D.:} \quad]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

2. Segno della funzione

   $f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{e^{-x}}{1-x} = 0$ Mai perchè $\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}$ non si annulla mai

   $f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{e^{-x}}{1-x} > 0$

   Poichè $\mathrm{e}^{-\mathrm{x}}$ è sempre positiva, studio solo il denominatore, quindi:

   $1 - x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 1$

   $f(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{e^{-x}}{1-x} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1$

3. Comportamento agli estremi del dominio

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{1-x} = \frac{0}{-\infty} \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x}(1-x)} = 0^{-}$$

   $$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{1-x} = \frac{+\infty}{+\infty} \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{1-x} \overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{-e^{-x}}{-1} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = +\infty$$

   $$\lim_{x\to1^{+}} \frac{e^{-x}}{1-x} = -\infty \quad \left(\frac{e^{-1}}{0^{-}}\right)$$

   $$\lim_{x\to1^{-}} \frac{e^{-x}}{1-x} = +\infty \quad \left(\frac{e^{-1}}{0^{+}}\right)$$

   La retta $\mathrm{y} = 0$ è asintoto orizzontale a destra

La retta x = 1 è asintoto verticale

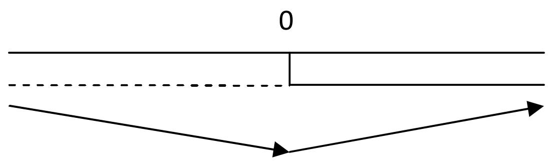
4. <u>Crescenza e Decrescenza (Studio derivata prima)</u>

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} \iff f'(x) = \frac{(1-x)(-e^{-x}) - e^{-x}(-1)}{(1-x)^2} = \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2} = 0 \iff x = 0$$ E' un punto critico

$$f'(x) > 0 \iff \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2} > 0 \iff x > 0$$

$$f'(x) < 0 \iff \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2} < 0 \iff x < 0$$



Il punto x = 0 è un punto di minimo. Calcoliamo le sue coordinate:
m = $(0, f(0)) = (0,1)$
m è un minimo relativo perché se lo confronto con con le coordinate degli estremi del dominio non è il più piccolo, infatti: $f(-\infty) = +\infty$, $f(+\infty) = 0$. Basta questo secondo punto per affermare che m non è un punto di minimo assoluto.

5. <u>Concavità e Convessità (Studio derivata seconda)</u>

$$f'(x) = \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(1-x)^2[e^{-x} - xe^{-x}] - xe^{-x}[2(1-x)]}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{e^{-x}(1-x)^3 - 2xe^{-x}(1-x)}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{e^{-x}(1-x)[(1-x)^2 - 2x]}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{e^{-x}(1-x)(x^2 + 1)}{(1-x)^4}$$

$$f''(x) = 0 \iff \frac{e^{-x}(1-x)(x^2+1)}{(1-x)^4} = 0 \iff 1-x=0 \iff x=1$$

$$f''(x) > 0 \iff \frac{e^{-x}(1-x)(x^2+1)}{(1-x)^4} > 0 \iff 1-x>0 \iff x<1$$

$$f''(x) < 0 \iff \frac{e^{-x}(1-x)(x^2+1)}{(1-x)^4} < 0 \iff 1-x<0 \iff x>1$$