Traccia 1

Il candidato svolga un tema e risolva almeno due esercizi (scelti in almeno due aree diverse) fra quelli proposti.

Temi

1. Ultraprodotti e Teorema di Loš.
2. Monoidi e anelli fattoriali.
3. Applicazioni affini e isometriche.
4. Il paradigma del ragionamento euclideo: questioni didattiche e fondazionali.
5. Serie di potenze.
6. La passeggiata aleatoria.
7. L'equazione simbolica della meccanica.
8. Risoluzione numerica di equazioni o sistemi non lineari.
9. Programmazione lineare: principali aspetti teorici ed algoritmi risolutivi.

Esercizi

1. Dimostrare che la proprietà di essere un insieme finito non è una proprietà generale del primo ordine.
2. Sia G un gruppo finitamente generato, $G \neq \{1\}$. Si provi che ogni sottogruppo proprio è contenuto in un sottogruppo massimale. Si osservi poi che tale proprietà non vale necessariamente per gruppi qualunque, neanche se dotati di sottogruppi massimali.
3. Descrivere il gruppo delle simmetrie del cubo.
4. Dire perché l'intervallo aperto $(0,1)$ è equipotente all'intervallo chiuso $[0,1]$ ed indicare esplicitamente un esempio di funzione biettiva tra tali due insiemi.
5. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale
$$y' - \frac{2x}{1+x^2}\, y = x\, y^3\,.$$
Vi sono soluzioni dell'equazione differenziale definite su tutto l'asse reale? In caso affermativo, quali sono?
6. Siano $X_1(t)$ e $X_2(t)$ due processi di Poisson indipendenti di parametri λ_1 e λ_2, rispettivamente. Determinare, per $n = 0, 1, \ldots,$
(i) $P[X_1(t) + X_2(t) = n]$;
(ii) $P[X_1(t) = k \,|\, X_1(t) + X_2(t) = n]$ per $k = 0, 1, \ldots, n$;
(iii) $E[X_1(t) \,|\, X_1(t) + X_2(t) = n]$.

7. Un paracadutista si lancia col paracadute aperto e velocità iniziale nulla.Calcolare la velocità limite di caduta, sapendo che la massa del paracadutista è $m = 75\, kg$ e supponendo la resistenza dell'aria idraulica

$$\mathbf{R} = -\frac{1}{2}\, c\, \rho\, S\, v^2\, \mathrm{vers}\, v\,,$$

il coefficiente adimensionale di resistenza $c = 1,4$, la densità dell'aria $\rho = \frac{1}{8}\frac{kg}{m^3}$, la proiezione della superfice sul piano perpendicolare alla direzione del moto $S = 36\, m^2$.

8. Si determini una fattorizzazione LU della matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sfruttando la fattorizzazione determinata, si calcoli il determinante di A.

9. Siano P e Q due poliedri in $\mathbb{R}^n$. Sia $P + Q = \{\underline{x} + \underline{y} : \underline{x} \in P, \underline{y} \in Q\}$.
a. Dimostrare che $P + Q$ è un poliedro.
b. Dimostrare che ogni punto estremo di $P + Q$ è la somma di un punto estremo di P e di un punto estremo di Q.

Traccia 2

Il candidato svolga un tema e risolva almeno due esercizi (scelti in almeno due aree diverse) fra quelli proposti.

Temi

1. Sull'assioma della scelta.
2. Campi finiti.
3. I metodi e gli strumenti algebrici e geometrici usati nella classificazione proiettiva, affine e metrica delle coniche reali.
4. Problemi fondazionali e didattici sul concetto di numero.
5. Equazioni differenziali ordinarie lineari.
6. Processi di diffusione.
7. Il principio dei lavori virtuali.
8. Interpolazione di Lagrange e sue applicazioni nell'ambito dell'analisi numerica.
9. La teoria della Dualità nella Programmazione Lineare: aspetti teorici, algoritmici e applicativi.

Esercizi

1. Provare che nell'aritmetica formale, per ogni coppia di naturali n, m, tali che $n \neq m$, è teorema formale la formula:
$$\neg(\overline{n} = \overline{m})$$
ove $\overline{n}, \overline{m}$ sono i numerali di n e m, rispettivamente.

2. Sia p un numero primo e, nel gruppo $G = GL(2, \mathbb{Z}_p)$, con $\mathbb{Z}_p$ campo d'ordine p, si consideri il sottoinsieme
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_p, ac = 1 \right\},$$
Si provi che H è un sottogruppo di G non normale in G e se ne determini l'ordine.

   Si provi che se $p = 2$ o $p = 3$, il gruppo H è abeliano.

   Si provi che se $p > 3$, il centro di H ha ordine 2.

3. Siano (X, V, α_f) e (X, V, α_g) le strutture affini di un insieme X introdotte da biezioni f e g di X sullo spazio vettoriale V. Provare che $\alpha_f = \alpha_g$ se e solo se $g \circ f^{-1}$ una traslazione di V.

4. Considerare la seguente affermazione
″La classe dei gruppi ha la stessa cardinalità della classe degli anelli″
Dire se
a) l'affermazione è vera
b) l'affermazione è falsa
c) l'affermazione è posta male.
Motivare la risposta.

5. Si dica se le seguenti forme differenziali sono esatte nel dominio indicato:

$$\omega = x\,y\,dx + \frac{x^2}{2}\,dy\,, \qquad E = \mathbb{R}^2;$$

$$\omega = \Big(\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y}\Big)\,dx + \Big(\frac{1}{x} + \frac{x}{y^2}\Big)\,dy\,, \qquad E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \neq 0,\ y \neq 0\}\,.$$

Si calcoli, se esiste, una primitiva.

6. Sia $X(t)$ un processo di Poisson di parametro λ. Per $0 < s < t$ e $n = 0, 1, \ldots$ determinare
(i) $P[X(s) = k \,|\, X(t) = n]$ per $k = 0, 1, \ldots, n$;
(ii) $E[X(s) \,|\, X(t) = n]$;
(iii) $Var[X(s) \,|\, X(t) = n]$.

7. Un punto materiale (P, m) si muove su di una traiettoria γ, fissa rispetto a un sistema di riferimento inerziale, sotto l'azione di una forza la cui componente tangenziale rispetto a γ è $F_\tau = k\,t$. Determinare il moto del punto materiale, supponendo (P, m) inizialmente in quiete.

8. Si costruisca la successione delle prime 3 iterazioni del metodo di sovrarilassamento (con parametro di rilassamento a scelta del candidato) per la risoluzione del sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

9. Dimostrare che esattamente uno tra i seguenti sistemi ha soluzione:
a. $A\underline{x} \geq \underline{0}, \quad \underline{x} \geq \underline{0} \quad$ e $\quad \underline{c}^T\underline{x} > \underline{0}$
b. $A^T\underline{y} \geq \underline{c} \quad$ e $\quad \underline{y} \leq \underline{0}$.
(suggerimento: usare il lemma di Farkas)

Traccia 3

Il candidato svolga un tema e risolva almeno due esercizi (scelti in almeno due aree diverse) fra quelli proposti.

Temi

1. Illustrare il teorema di completezza funzionale del calcolo proposizionale, applicandolo a qualche esempio.
2. Aspetti della teoria dei Gruppi finiti.
3. Forma canonica di Jordan.
4. La nozione di infinito in un contesto scolastico.
5. Teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale.
6. Processi di conteggio: proprietà ed esempi.
7. Il principio dell'effetto giroscopico.
8. Metodi numerici e algoritmi per il calcolo di integrali definiti.
9. Il problema del flusso massimo su una rete: presentare i relativi modelli ed algoritmi di soluzione.

Esercizi

1. Trovare una forma normale prenessa equivalente alla formula:

$$(\exists x)P(x,y) \to (Q(x) \to \neg(\exists u)P(x,u))$$

2. Con $\mathbb{Z}_3$ campo d'ordine 3, si decomponga il polinomio

$$f(x) = x^6 + x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$$

   in fattori irriducibili e se ne determini un campo di spezzamento K rispetto a $\mathbb{Z}_3$, verificando in particolare che $|K| = 9$.

   Considerato poi il polinomio fondamentale $g(x)$ su K, si evidenzi il legame tra $f(x)$ e $g(x)$ in $\mathbb{Z}_3[x]$.

3. Nello spazio affine numerico $\mathbb{R}^3$ dire se esiste un'applicazione affine che manda i punti $P = (0,0,1)$, $Q = (1,0,-1)$, $R = (2,1,0)$ ordinatamente nei punti $P' = (0,0,0)$, $Q' = (1,-1,0)$, $R' = (0,0,1)$. In caso di esistenza dire se esiste una affinità che si comporta nel modo richiesto e determinarne la rappresentazione nel riferimento standard.

4. Siamo liberi di inventarci le due seguenti operazioni nel campo dei razionali ?

$$n/m \otimes p/q = n/m + p/q - 2\,; \qquad n/m \underline{\otimes}\, p/q = (n-1)/m + (p-1)/q$$

   Motivare la risposta.

5. Si determinino gli insiemi di convergenza e la somma delle serie di potenze in $\mathbb{R}$ delle serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x^2)^n}{n!},$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(3x-2)^{n+1}.$$

6. Sia X una variabile aleatoria non negativa avente funzione di distribuzione $F(x)$ e tale che

$$\mathcal{E}(X) := -\int_0^{+\infty} F(x) \log F(x)\, dx$$

sia finita.
(i) Mostrare che $\mathcal{E}(Y) = a\,\mathcal{E}(X)$ per $Y = a\,X + b$, con $a > 0$ e $b \geq 0$.
(ii) Mostrare che per $\theta \geq 1$ risulta $\mathcal{E}(\theta X) \geq \mathcal{E}(Y_\theta)$, dove Y_θ ha funzione di distribuzione $P(Y_\theta \leq x) = [F(x)]^\theta$.
(iii) Mostrare che $\mathcal{E}(nX_1) \geq \mathcal{E}(\max\{X_1, \ldots, X_n\})$, dove $X_1, \ldots, X_n$ sono variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite, aventi la medesima distribuzione di X.

7. Una barca di massa $m = 40\,kg$ è spinta in acqua con velocità iniziale $v_0 = 0,5\,m/sec$, supponendo la resistenza dell'acqua viscosa

$$\mathbf{R} = -\mu\, v\,,$$

dove $\mu = 9.1\,kg/sec$, calcolare la distanza percorsa dalla barca prima di fermarsi.

8. Si localizzino gli autovalori della seguente matrice

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

utilizzando il teorema di Gerschgorin.

9. Dato il seguente problema di programmazione lineare :

$$\min\ -x_1 - x_2$$
$$-x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1 + x_2 \geq 1$$
$$x_1 \leq 1$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

a) Risolvere il problema graficamente.
b) Verificare algebricamente se al punto $[x_1, x_2] = [0\,1]$ corrisponde una soluzione ammissibile di base per P.
c) Risolvere il problema applicando il teorema della rappresentazione.