TRACCIA 3

Il candidato svolga un tema e risolva almeno due esercizi fra quelli proposti.
Temi

1. Espressività della logica del primo ordine.
2. Esistenza e unicità a meno di isomorfismi di spazi vettoriali di dimensione arbitraria su un qualunque corpo.
3. Esporre alcuni teoremi di geometria Euclidea.
4. Modelli di geometria iperbolica e in particolare il gruppo delle isometrie iperboliche.
5. Funzioni implicite.
6. Reti di code aperte e chiuse: teoremi di Jackson e Gordon-Newell.
7. Equazioni di Lagrange.
8. Approssimazione di dati e funzioni.
9. Modelli di programmazione lineare e algoritmi risolutivi.

Esercizi

1. Tramite equivalenze logiche ridurre la seguente formula a forma normale congiuntiva:
$$(A \to (B \wedge \neg A)) \vee B \ .$$
2. Sia $f = x^4 - a$ un polinomio su $\mathbb{R}$. Si provi che f è riducibile se e solo se:
   - $\left(\exists b \in \mathbb{R} : a = b^2\right)$ oppure
   - $\left(\exists c \in \mathbb{R} : a = -4c^2\right)$.
3. Siano p e q numeri primi. Dire se la radice quadrata di pq è un numero razionale.
4. Stabilire se esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ suriettiva tale che
$$\ker f = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + z = 4z = 0\}.$$
5. Determinare l'integrale generale e/o particolare della seguente equazione differenziale:
$$y' - \frac{4}{x}y = x\sqrt{y}.$$

6. Sia $\{X_n; n = 1, 2, \ldots\}$ una successione di variabili aleatorie i.i.d., aventi funzione di distribuzione F tale che $F(x) = \lambda\, x^\alpha + o(x^\alpha)$ per $x \to 0^+$, con $\lambda > 0$ e $\alpha > 0$. Posto

$$Y_n = n^{1/\alpha} \cdot \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\},$$

studiare la convergenza in distribuzione della successione $\{Y_n; n = 1, 2, \ldots\}$.

7. Dato il campo di forze

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -k \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

con k costante positiva, si determini il lavoro compiuto relativamente al seguente moto di un punto materiale

$$P(t) = \frac{\left(\cos t, \sin t, \sqrt{\sin 2t}\right)}{\cos t + \sin t}$$

nell'intervallo di tempo da $t_0 = 0$ a $t_1 = \pi/4$. Stabilire se il campo è conservativo e in tal caso determinare il suo potenziale.

8. Si costruisca la successione delle prime 3 iterazioni del metodo di Gauss-Seidel per la risoluzione del sistema lineare $Ax = b$, con

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 0 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

9. Dato il seguente grafo

$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,4)$	$(2,3)$	$(4,3)$	$(4,5)$	$(5,3)$	$(4,6)$	$(5,6)$
2	1	2	1	2	1	1	3	k

Determinare l'abero dei cammini minimi al variare di k.