TRACCIA 3

Il candidato svolga un tema e risolva almeno due esercizi (scelti in almeno due aree diverse) fra quelli proposti.

Temi

1. Teoria dell ultra potenze.
2. Proprietà dell'anello dei polinomi in un'indeterminata a coefficienti in un campo.
3. Equiscomponibilità.
4. Introdurre il gruppo fondamentale di uno spazio topologico, dare esempi, metodi di calcolo ed applicazioni.
5. Confronto tra integrale di Riemann e di Lebesgue.
6. Formule di quadratura di Newton-Cotes (e applicazioni).
7. Processi e catene di Markov.
8. Il metodo del simplesso per la risoluzione dei problemi di programmazione lineare.
9. Moti per inerzia di un corpo rigido con un punto fisso a struttura giroscopica.

Esercizi

1. Dimostrare che, per ogni n, il gruppo degli automorfismi dell'insieme ordinato $(\{1, 2, 3, 4, n\}, \leq)$ è identico.
2. Nel gruppo $G = GL(2, \mathbb{Q})$ delle matrici 2×2 sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali si considerino i sottoinsiemi

   $$H = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a \in \{1, -1\}, b \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}\}, K = \{\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid c, d \in \{1, -1\}\}.$$

   Si provi che H è un sottogruppo abeliano di G e che K è un sottogruppo normale di H. Posti $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, $X = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, e $Y = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, si determinino il periodo di A, di X, di Y e di XY, gli elementi di $\langle A \rangle$, di $\langle X \rangle$, di $\langle Y \rangle$, e la struttura di K.
3. Trovare l'espressione analitica di una funzione biettiva tra gli insiemi $[0, 1]$ ed R.
4. Quali spazi proiettivi sono orientabili e quali non orientabili.

5. Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$x^2y' = 4y^2 - 3xy - 3x^2$$

6. Si determini una fattorizzazione LU della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sfruttando la fattorizzazione determinata, si calcoli il determinante di A.

7. n un interporto arrivano, secondo un processo di Poisson, mediamente 30 treni merce al giorno. Assumendo che i treni vengano scaricati uno alla volta e che i tempi di scarico seguano una distribuzione esponenziale con media di 36 minuti, determinare:

   a) la probabilità che il numero di treni merce nell'interporto sia superiore a 10;

   b) il numero medio di treni merce nell'interporto.

8. Usando l'algoritmo del branch and bound, calcolare la soluzione del seguente problema di programmazione lineare intera:

$$\begin{gathered} \min 3x_1 + 2.5x_2 \\ x_1 + 2x_2 \geq 20, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 50, \\ x_1 \geq 0,\, x_2 \geq 0, \\ x_1 \in \mathbb{Z},\, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{gathered}$$

9. Un sistema materiale è composto da due aste rigide AB e BC di uguale massa m e di lunghezza $2l$, collegate in B con una cerniera cilindrica. Nel punto A, che è fisso, il sistema oscilla in un piano verticale soggetto alla sola forza peso. Si scrivano le equazioni di Lagrange che governano il moto del sistema, scegliendo come configurazione iniziale di riferimento quella in cui i punti A, B e C risultano allineati lungo la verticale.