TRACCIA 3

Il candidato svolga un tema e risolva almeno due esercizi (scelti in almeno due aree diverse) fra quelli proposti.

Temi

1) Approccio assiomatico formale ai Numeri Ordinali.

2) Campo dei quozienti di un dominio d'integrità.

3) Si descriva la classificazione delle forme bilineari simmetriche e di quelle alternanti su uno spazio vettoriale reale di dimensione finita, dimostrando alcuni tra i principali risultati.

4) Il problema di Cauchy per le equazioni differenziali ordinarie.

5) Enunciare e dimostrare il teorema di König.

6) Formule di quadratura gaussiane.

7) Sistemi a coda esponenziali.

Esercizi

1) Dimostrare che:

$$\vdash (\forall y_1)...(\forall y_n)A \to A.$$

Nota: Nella formula precedente A è un simbolo predicativo.

2) Considerato il polinomio $f(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ e posto $J = (f(x))$, dell'anello $\mathbb{Z}_2[x]/J$ si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti.

3) Nel gruppo simmetrico S_7 si considerino gli elementi

$$a = (1357), b = (37), c = (246), d = (26).$$

Si studino i gruppi $V = \langle a, b\rangle$ e $W = \langle c, d\rangle$. Si provi poi che il gruppo $G = \langle a, b, c, d\rangle$ è prodotto diretto di V e W, che il sottogruppo $L = \langle a^2, c\rangle$ è normale in G e si precisino i sottogruppi di Sylow di G ed il centro di G. Si giustifichi infine perché $\langle a, b, c\rangle$ non è isomorfo ad S_4.

4) Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

$$U =< (1, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 1) >,$$
$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = z + t = 0\}.$$

Determinare:
- un sistema lineare omogeneo che rappresenti U,
- la dimensione e una base di U e W,

- la dimensione e una base di $U^{\perp}$,
- la dimensione e una base di $U \cap W$ e $U + W$.

5) Integrare la seguente equazione differenziale:

$$y'' - y = x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

6) Verificare che la forma differenziale

$$(4x\sqrt{y} + 3x^2)\,dx + \big(\frac{x^2}{\sqrt{y}} + 3y^2\big)\,dy$$

è un differenzile esatto e calcolarne le primitive.

7) Un sistema biella-manovella è costituito da due asticelle materiali di massa m unidimensionali OA (con O fisso), e AB (con B vincolato a muoversi lungo l'asse x), vincolate da uno snodo in A e inoltre vincolate a muoversi in un piano orizzontale. Le lunghezze delle asticelle sono uguali e pari a $2a$. Esse sono soggette alla sola forza elastica di richiamo $F = -k(B - O)$.

Assumendo tutti i vincoli perfetti e scegliendo come coordinata lagrangiana l'angolo α che l'asticella forma con il semiasse positivo delle x, calcolare:
- la lagrangiana,
- l'equazione di Lagrange,
- le configurazioni di equilibrio del sistema.

8) Calcolare il determinante della matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

mediante fattorizzazione LU.

9) Si costruisca la successione delle prime tre iterate del metodo di Newton per il calcolo delle radici del polinomio:

$$P(x) = x^2 - 2x + 1$$

e si definisca l'ordine di convergenza del metodo.

10) Un giocatore ha due euro. Scommette un euro alla volta e ha probabilità $\frac{1}{2}$ di vincere un euro. Egli cessa di giocare se perde due euro o se ne vince quattro. Determinare:
- la matrice di transizione della catena markoviana che descrive il gioco,
- la probabilità che il gioco duri più di sette mani.