

### TRACCIA 3

Il candidato svolga uno ed uno solo dei seguenti temi e risolva almeno due esercizi fra quelli proposti (preferibilmente in aree diverse).

#### Temi

- 1) Forme canoniche per matrici quadrate.
- 2) Teorema di Hartogs nella teoria assiomatica degli insiemi.
- 3) Estensioni di Galois e loro caratterizzazioni.
- 4) Illustrare qualche risultato relativo alle funzioni continue nell'ambito degli spazi metrici.

#### Esercizi

- 1) Sia  $V$  uno spazio vettoriale complesso di dimensione 6. Si determinino tutti gli endomorfismi  $\phi$  di  $V$  che hanno rango  $\geq 4$  ed il cui polinomio minimo è  $x^4 - 6x^3 + 9x^2$ .
- 2) Un gruppo topologico è un gruppo  $(G, \cdot)$  dotato di una topologia per la quale le applicazioni  $(g, h) \mapsto g \cdot h$  e  $g \mapsto g^{-1}$  sono continue.  
Si dimostri che, se  $G$  è un gruppo topologico connesso, allora ogni intorno aperto dell'elemento neutro è un insieme di generatori di  $G$ .
- 3) Teorema di deduzione del calcolo predicativo.
- 4) Illustrare il teorema di completezza funzionale del calcolo proposizionale, applicandolo a qualche esempio.
- 5) Sia  $f = x^3 + 4x - 6 \in \mathbb{Q}[x]$ . Posto  $I = (f)$ , stabilire se l'elemento  $x^2 + I$  del quoziente  $\mathbb{Q}[x]/I$  è invertibile, ed in tal caso determinare  $(x^2 + I)^{-1}$ .
- 6) Sia  $G$  un gruppo, e sia  $H$  un sottogruppo di indice finito in  $G$ . Provare che  $H$  contiene un sottogruppo  $N$  normale in  $G$  e di indice finito.
- 7) Integrare la seguente equazione differenziale:

$$y'' + y' + y = \sin 2x.$$

- 8) Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x, y) = 2x^3 + 3y^2 - 6xy.$$