

### TRACCIA 3

Il candidato svolga un tema e risolva almeno due esercizi (scelti in almeno due aree diverse) fra quelli proposti.

#### Temi

- 1) Aspetti logici delle nozioni di omomorfismo, isomorfismo e congruenza.
- 2) Gruppi ciclici.
- 3) Le isometrie degli spazi euclidei.
- 4) Successioni di funzioni: convergenza puntuale e uniforme.
- 5) Equazioni di Lagrange.
- 6) Formule di quadratura interpolatorie.
- 7) Processi di Markov.

#### Esercizi

- 1) Sia  $(\mathbb{R}, \leq)$  l'insieme ordinato dei numeri reali.
  - $(\mathbb{R}, \leq)$  è isomorfo alla struttura  $(\mathbb{Q}, +)$ ?
  - $(\mathbb{R}, \leq)$  è isomorfo alla struttura  $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ ?
  - $(\mathbb{R}, \leq)$  è isomorfo alla struttura  $(\mathbb{R}, +)$ ?
  - $(\mathbb{R}, \leq)$  è isomorfo alla struttura  $([0, 1], \leq)$ ?
  - $(\mathbb{R}, \leq)$  è isomorfo alla struttura  $(]0, 1[, \leq)$ ?Motivare le risposte.
- 2) Si provi che il polinomio  $x^3 + ax + 1$  a coefficienti in  $\mathbb{Z}$  è irriducibile su  $\mathbb{Q}$  se e solo se  $a$  è diverso da 0 e da -2.
- 3) Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo  $K$ . Sia  $R$  l'anello delle applicazioni  $K$ -lineari di  $V$  in se stesso. Si provi che  $R$  non ha ideali bilateri non banali.
- 4) Dare un esempio di superficie il cui gruppo fondamentale non è commutativo. Il gruppo fondamentale discrimina tra le superfici connesse e compatte?
- 5) Integrare l'equazione differenziale:

$$y' - \frac{2}{x}y = 1.$$

- 6) Riconoscere che la forma differenziale:

$$((x + y + 1)e^x - e^y) dx + (e^x - (x + y + 1)e^y) dy$$

è un differenziale esatto e calcolarne le funzioni primitive.

7) E' dato un punto materiale in moto su una guida liscia di equazione

$$x^2 + y^2 - 4Rx - 2Ry + 4R^2 = 0.$$

Sul punto materiale oltre alla forza peso agisce la forza elastica  $F = -k(P - O)$ , dove  $O$  è l'origine degli assi. Si chiede di determinare:

- l'equazione pura del moto
- le posizioni di equilibrio.

8) Per il sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

a partire da  $x^{(0)} = \left(1, \frac{1}{2}\right)^T$ , si calcoli esplicitamente le prime 2 - 3 iterazioni ottenute con i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel.

9) Definire la precisione di macchina e descrivere l'algoritmo per calcolarla.

10) Data la catena di Markov la cui matrice di transizione è

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

determinare la probabilità stazionaria della catena.