

TRACCIA 2

Il candidato svolga un tema e risolva almeno due esercizi fra quelli proposti.

Temi

1. Il teorema di completezza della logica predicativa.
2. Estensione simbolica algebrica, primo teorema (o lemma) di prolungamento.
3. Algoritmi nella storia della matematica.
4. Classificazione affine e proiettiva delle coniche.
5. Forme differenziali.
6. Descrivere la legge di probabilità di un processo stocastico di interesse in ambito applicativo, soffermandosi sulle sue principali proprietà.
7. Significato e importanza di *base* e *rulletta* nella meccanica dei moti rigidi piani.
8. Metodi numerici per la risoluzione di sistemi lineari.
9. Teoria della dualità.

Esercizi

1. Trovare una forma normale prenessa equivalente alla formula:

$$(\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)) \rightarrow (\forall x\exists y(\neg P(x) \vee \neg Q(y))) .$$

2. Nell'anello dei polinomi $K[x]$ si consideri il polinomio $x^3 + kx + 4$.
Nei casi $K = \mathbb{R}$, $K = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{Z}_5$ si determini, in funzione di k , quando l'anello $A = K[x]/(x^3 + kx + 4)$ è un campo.
3. Se A è un alfabeto finito dire quale è la cardinalità dell'insieme A^+ delle parole su A . Detto \mathbb{R} l'insieme dei reali, provare che \mathbb{R} esteso con $+\infty$ e $-\infty$ è equipotente ad \mathbb{R} .
4. Provare che le sfere Euclidee S^1 e S^3 sono gruppi topologici.
5. Data la funzione

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-\alpha x} dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$,

- discutere la convergenza e l'assoluta convergenza dell'integrale $f(\alpha)$;

- determinare, mediante il calcolo di $f'(\alpha)$, il valore dell'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

6. Sia X il tempo aleatorio di durata di un dispositivo con densità

$$f(x) = \begin{cases} kxe^{-4x^2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

Determinare la costante k e la probabilità dell'evento condizionato

$$X > 3 | X > 1.$$

7. Sia dato un sistema materiale piano e omogeneo, delimitato dalla semicirconferenza di centro O , di raggio $2a$ e dalla semicirconferenza di centro $C_1 \equiv (-a, 0)$, di raggio a , entrambe giacenti nel semipiano $y \geq 0$ e dalla semicirconferenza di centro $C_2 \equiv (a, 0)$, di raggio a e giacente nel semipiano $y \leq 0$. Si determini il baricentro del sistema.

8. Trovare un'approssimazione dell'integrale

$$\int_{-1}^1 (x\sqrt{1+x^2} + 3) dx$$

mediante la formula dei trapezi e di Simpson.

9. Risolvere il seguente problema di PL con il metodo del Simplexso

$$\begin{aligned} \max & 3x_1 - 2x_2 - x_3 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 3, \\ & -2x_1 + 6 \leq 6x_2 + 2x_3, \\ & 2x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 2, \\ & 3x_1 - x_2 \geq 0, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$