TRACCIA 2

Il candidato svolga un tema e risolva almeno due esercizi (scelti in almeno due aree diverse) fra quelli proposti.

Temi

1. Teoremi limitativi in teoria della computabilità.
2. Estensioni di campi.
3. Insiemi numerici.
4. Modelli del piano proiettivo reale.
5. Teorema di esistenza e unicità per il problema di Cauchy.
6. Metodi numerici per il calcolo degli autovalori di matrice.
7. Sistemi a coda a buffer finito ed infinito, probabilità stazionarie e indici di prestazione.
8. Il problema del massimo flusso su reti.
9. Equazioni di Hamilton.

Esercizi

1. Ridurre in forma normale prenessa la seguente formula e poi eliminare il quantificatore esistenziale
$$(\forall y(\exists x(x2 + y = x))) \wedge (\exists x \exists y(x + y = y + x))$$
2. Considerato il polinomio $f(x) = x^7 + x^5 + x^4 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ e posto $J = (f(x))$, dell'anello $\mathbb{Z}_2[x]/J$ si caratterizzino gli elementi invertibili, i divisori dello zero, gli elementi nilpotenti.
3. Definiamo la funzione $f : Q \to Q$ ponendo $f(n/m) = (n + 1)/m$. Commentare tale definizione.
4. Provare almeno per $n = 1$ e $n = 2$ che la sfera S_n non è un retratto della palla di cui è bordo.
5. Calcolare la somma della seguente serie di potenze:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}.$$

6. Si fornisca una stima del numero di punti richiesto dalla formula dei trapezi composita per il calcolo dell'integrale

$$\int_0^2 e^{-x}(x+2)dx$$

con 6 cifre decimali corrette.

7. Un ragazzo ha 2 Euro. Scommette il denaro che ha e può vincere o perdere a seconda dell'esito del lancio di un dado. Se, lanciando il dado, si ottiene una faccia pari, allora il ragazzo vince 1 Euro; altrimenti, perde 1 Euro. Sapendo che il gioco termina non appena il ragazzo perde tutti i suoi soldi oppure quando raggiunge i 4 Euro, determinare:

   a) la matrice della catena di Markov che descrive l'evoluzione del capitale del ragazzo

   b) la probabilità che, dopo due lanci del dado, il ragazzo abbia 2 Euro;

   c) la probabilità che il ragazzo vinca.

8. Si consideri un grafo orientato $G(V,E)$, avente cinque nodi ($V = \{a,b,c,d,e\}$) e sette archi. A ciascun arco è associato un costo secondo la seguente tabella:

Arco	(a,b)	(a,c)	(b,d)	(b,e)	(c,b)	(c,e)	(d,e)
Costo	3	4	2	8	5	2	1

   Usando l'algoritmo di Dijkstra, determinare e disegnare l'albero dei cammini minimi dal nodo a verso tutti gli altri nodi.

9. Calcolare il momento d'inerzia rispetto alla retta r del sistema piano omogeneo di massa M tratteggiato in figura.