TRACCIA 2

Il candidato svolga un tema e risolva almeno due esercizi (scelti in almeno due aree diverse) fra quelli proposti.

Temi

1) Teorema di Skolem-Lowenheim e sua estensione a teorie con identità.
2) Domini ad ideali principali.
3) Teorema spettrale e sue applicazioni.
4) Funzioni continue su insiemi compatti.
5) Equazioni canoniche di Hamilton.
6) Approssimazione di dati e funzioni mediante polinomi algebrici.
7) Le catene di Markov.

Esercizi

1) Provare che la seguente formula è logicamente valida:

$$[((\forall x_1)A(x_1)) \to ((\exists x_1)A(x_1))].$$

Nota: Nella formula precedente A è un simbolo predicativo.

2) Si determini un campo di spezzamento rispetto a $\mathbb{Z}_2$ del polinomio

$$f(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x].$$

3) Se $H_1, \cdots, H_s$ $(s \geq 2)$ sono sottogruppi di un gruppo G, si ponga

$$H_1 \cdots H_s = \{x_1 \cdots x_s | x_1 \in H_1, \cdots, x_s \in H_s\}.$$

Si dimostri che, se A, B, C sono sottogruppi di G, allora ABC è un sottogruppo di G se e solo se $BCA \subseteq ABC$ e $BCB \subseteq ABC$. Si provi poi che da ABC sottogruppo non segue necessariamente $BCA = ABC$.

4) Determinare l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$f(2,0,0) = (0,-2,2),$$
$$f(0,1,0) = (1,2,-1),$$
$$f(0,0,2) = (-2,-2,4).$$

Calcolare poi:
- la dimensione e una base per $\operatorname{Im} f$ e $\ker f$,
- autovalori, dimensione e base di ciascun autospazio,

- la matrice che diagonalizza l'applicazione (nel caso in cui sia diagonalizzabile).

5) Integrare la seguente equazione differenziale:

$$y' - \frac{2}{x}\, y = -\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

6) Verificare che la forma differenziale:

$$(x + xy^2)\, dx + (y + yx^2)\, dy$$

è un differenziale esatto e calcolarne le primitive.

7) Si consideri un punto materiale di massa m vincolato a stare su una curva fissa e priva di attrito. Nell'ipotesi che il punto sia soggetto a una resistenza viscosa e a una forza elastica di richiamo, si scriva l'equazione differenziale del moto e se ne determinino le soluzioni.

8) Risolvere il seguente sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 4 & 12 & 4 \\ 8 & 64 & 8 \\ 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ -24 \end{pmatrix}$$

con il metodo di eliminazione di Gauss con pivoting parziale.

9) Si costruisca la successione delle prime tre iterate del metodo dei trapezi composti per il calcolo del seguente integrale

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{1 + 25x^2}\, dx.$$

Discutere le diverse strategie di scelta dei nodi e la stima dell'errore da utilizzare nell'algoritmo.

10) Presso un laboratorio di analisi della Croce Rossa arrivano 10 donatori in un'ora secondo un processo di Poisson. Essi sono ricevuti da due infermieri che effettuano 8 prelievi ogni mezz'ora. Calcolare, nell'ipotesi che la sala d'attesa possa contenere solo 15 posti:

- la probabilità di avere 7 clienti nel sistema,
- la probabilità che si verifichi una perdita.