TRACCIA 2

Il candidato svolga uno ed uno solo dei seguenti temi e risolva almeno due esercizi fra quelli proposti (preferibilmente in aree diverse).

Temi

1) La classificazione delle forme bilineari simmetriche su uno spazio vettoriale di dimensione finita sul campo complesso e su quello reale.

2) Teorema dell'induzione transfinita nella teoria assiomatica degli insiemi.

3) Polinomi ciclotomici e radici dell'unità.

4) Equazioni differenziali lineari.

Esercizi

1) Nel piano euclideo si determini l'equazione della conica C passante per il punto $P = (0, 2)$, tangente alla retta $r : x - y + 1 = 0$ nel punto $R = (1, 2)$ e tangente alla retta $s : 2x + y - 1 = 0$ nel punto $S = (2, -3)$.

2) Determinare la forma canonica di Jordan dell'endomorfismo $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la cui matrice, rispetto alla base canonica, è

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si determini inoltre una base di $\mathbb{R}^4$ rispetto a cui la matrice di ϕ è la forma canonica trovata.

3) Teorema di completezza del calcolo dei predicati.

4) Tradurre la seguente frase in una formula ben formata della teoria della quantificazione:

Se tutti i matematici fantasiosi sono cinici e solo le donne sono matematici fantasiosi, allora, se esistono matematici fantasiosi, qualche donna è cinica.

5) Caratterizzare gli ideali di $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$.

6) Provare che il prodotto tensoriale $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \bigotimes \mathbb{Q} = \{0\}$.

7) Integrare la seguente equazione differenziale:

$$2xy' + y = 3x^2y^2.$$

8) Verificare che la funzione

$$u(x, y) = e^{x+y} \sin(x - y) + e^{x-y} \sin(x + y)$$

è soluzione dell'equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$