TRACCIA 1

Il candidato svolga un tema e risolva almeno due esercizi fra quelli proposti.

Temi

1. Il teorema di compattezza e sue conseguenze.
2. Teorema di Lagrange in teoria dei gruppi e problema della sua inversione.
3. Aspetti didattici, storici ed algoritmici dell'aritmetica elementare.
4. Spazi vettoriali euclidei.
5. Confronto tra integrale di Riemann e Lebesgue.
6. Legge dei grandi numeri (debole e forte).
7. Integrali primi delle equazioni del moto. Definizione e applicazioni.
8. Metodi numerici per la risoluzione di problemi ai valori iniziali per equazioni differenziali ordinarie.
9. Il candidato illustri una classe di algoritmi per la soluzione del problema del percorso ottimo.

Esercizi

1. Fornire un esempio di un insieme minimale di connettivi proposizionali che sia adeguato a generare tutti i connettivi del calcolo proposizionale classico. Argomentare la risposta.
2. Un gruppo G è detto *metaciclico* se possiede un sottogruppo normale H ciclico tale che G/H è anch'esso ciclico. Si provi che se G è metaciclico, allora ogni suo sottogrupppo K è metaciclico, e così ogni suo quoziente G/N.
3. Data l'equazione $x^4 - x^2 - x - 10 = 0$ costruire graficamente le sue radici reali (trovare due coniche i cui punti di intersezione abbiano come ascisse le radici dell'equazione).
4. Data la conica di equazione
$$2x^2 + 4x - 2y + 1 = 0$$
classificarla e ridurla in forma canonica.
5. Si consideri la seguente forma differenziale
$$\omega(x, y) = (4x\sqrt{y - x^2} - 2x\sqrt{4 - x^2 - y^2})dx - (2\sqrt{y - x^2} + 2y\sqrt{4 - x^2 - y^2})dy.$$

Studiare l'insieme di definizione, la chiusura e l'esattezza della forma, determinarne una primitiva e calcolare l'integrale esteso alla curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}\cos t \\ y = 1 + \frac{1}{4}\sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

6. Un numero aleatorio continuo X ha una densità di probabilità

$$f(x) = \beta(x-2)^2, 0 \leq x \leq 1,$$

e $f(x) = 0$ altrove. Calcolare il valore della costante β.

7. Si consideri il moto di sistema formato da un punto materiale P di massa m e da un'asta ideale omogenea di massa $3m$ e lunghezza l: l'asta ruota in un piano orizzontale x, y intorno all'asse verticale z passante per uno degli estremi O; il punto materiale si muove senza attrito lungo l'asta. Sul punto materiale agisce, nella direzione del moto, la forza elastica di una molla avente costante di elasticità k e lunghezza a riposo $r_0 << l$, con un'estremità collegata a P e l'altra in O.
Siano φ l'angolo che l'asta forma con l'asse x e r la distanza di P dall'asse di rotazione.

- Determinare l'Hamiltoniana in funzione delle variabili φ, r, e dei loro momenti p_φ e p_r.
- Dedurre le equazioni canoniche di Hamilton.

8. Si costruisca la successione delle prime tre iterate del metodo delle potenze per il calcolo dell'autovalore di massimo modulo della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Risolvere il problema di PLI

$$\begin{gathered} \max 5x_1 + 8x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ 5x_1 + 9x_2 \leq 45, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}. \end{gathered}$$