

TRACCIA 1

Il candidato svolga un tema e risolva almeno due esercizi (scelti in almeno due aree diverse) fra quelli proposti.

Temi

1. Teoremi di Birkoff.
2. Gruppi ciclici.
3. Teoria degli ordinali.
4. Introdurre i gruppi classici della geometria.
5. Successioni di funzioni e tipi di convergenza.
6. Metodi iterativi per la risoluzione di sistemi lineari.
7. Processi stocastici, stazionarietà ed ergodicità.
8. Il problema del cammino minimo.
9. Sistemi lagrangiani e loro integrali primi.

Esercizi

1. Riferendosi all'ordinamento usuale, dire quali dei seguenti insiemi ordinati sono isomorfi e motivare la risposta

$$(0, 1), [0, 1), (0, 1] \cup [2, 5), \mathbb{R}, [0, 1], \mathbb{Q}, [0, \infty)$$

2. Sia A l'anello prodotto $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_6$. Si individuino i divisori dello zero di A . Si studi se la posizione

$$\psi([x]_6, [y]_6) = [4x - 3y]_6$$

definisce un'applicazione di A in \mathbb{Z}_6 e, in caso affermativo, se è suriettiva, iniettiva e se è un omomorfismo di anelli.

3. Si può definire un buon ordine in \mathbb{Z} ed in \mathbb{Q} senza usare l'assioma della scelta?
4. Provare che ogni omeomorfismo della retta euclidea in sé è una funzione monotona.
5. Data la forma differenziale:

$$\omega(x, y) = \frac{(2x - 5)\sqrt{4y^2 - 1}}{x^2 - 5x + 6} dx + \frac{4y \log(x^2 - 5x + 6)}{\sqrt{4y^2 - 1}} dy,$$

stabilire se è chiusa ed esatta. Determinare poi l'integrale della forma lungo il segmento γ che unisce i punti $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ e $(1, 2)$.

6. Determinare il polinomio interpolante di Lagrange associato ai seguenti punti:

$$A = (0, 0), \quad B = (1, -2), \quad C = (2, 0).$$

7. Buffon ha una probabilità $p = 0.7$ di parare i rigori. L'Italia e la Francia sono in finale ai calci di rigore e la Francia deve battere cinque rigori.

- a) Qual è la probabilità che Buffon pari almeno un rigore?
 b) Qual è la probabilità che Buffon pari tutti i rigori?

8. Risolvere il seguente problema di programmazione lineare usando il metodo del simplesso:

$$\begin{aligned} \min & -2x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \\ 4x_1 + x_2 &\leq 2, \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

9. Assegnato il sistema rigido articolato ad asse orizzontale, disegnato in figura, determinare la reazione vincolare esplicata dalla cerniera esterna in D col P.L.V. nell'ipotesi che i vincoli siano fissi, lisci e bilaterali.

