TRACCIA 1

Il candidato svolga un tema e risolva almeno due esercizi (scelti in almeno due aree diverse) fra quelli proposti.

Temi

1) Teoremi di completezza in logica matematica.

2) Sottogruppi normali e gruppo quoziente.

3) Costruzione del piano proiettivo reale $P^2(\mathbb{R})$ e dei suoi modelli. Studio delle proprietà topologiche e differenziali di $P^2(\mathbb{R})$.

4) Successioni di funzioni.

5) Principio di D'Alembert ed equazioni di Lagrange.

6) Fattorizzazione di matrici e loro utilizzi (nell'ambito dell'analisi numerica).

7) I processi stocastici.

Esercizi

1) Determinare le occorrenze libere e quelle vincolate delle variabili, nella formula:

$$((\forall x_2)(\exists x_1)A_1^3(x_1, x_2, f_1^2(x_1, x_2))) \vee \neg(\forall x_1)A_1^2(x_2, f_1^1(x_1)).$$

Nota: Nella formula precedente A_1^3 e A_1^2 sono simboli predicativi e f_1^1 e f_1^2 sono simboli funzionali.

2) Si determini un campo di spezzamento rispetto a $\mathbb{Z}_2$ del polinomio

$$f(x) = x^7 + x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x].$$

3) Si dimostri che l'insieme

$$R = \{z/(2^n) | z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0\}$$

è un sottoanello unitario di $\mathbb{Q}$, non un ideale, e se ne determinino la caratteristica e gli elementi invertibili. Si provi poi che R è un anello principale.

4) Nel piano euclideo, si studi la conica C di equazione

$$x^2 - 4xy + 3y^2 + 2x - 2y + 2 = 0,$$

determinandone l'eventuale centro, assi, fuochi, asintoti e forma canonica.

5) Integrare la seguente equazione differenziale:

$$y' + y \operatorname{cotg} x = x^3.$$

6) Verificare che la forma differenziale:

$$\frac{1}{x^2y}\,dx - \frac{x\log y - 1}{xy^2}\,dy$$

è un differenziale esatto e calcolarne le primitive.

7) Utilizzando il metodo di Lagrange scrivere l'equazione differenziale del moto di un pendolo semplice, determinare le posizioni di equilibrio e studiare le piccole oscillazioni.

8) Si costruisca la successione delle prime tre iterate dei metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel per la risoluzione del sistema lineare:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 5 & 8 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

verificando a priori se i metodi risultano convergenti.

9) Usando il Teorema di Gerschgorin, localizzare gli autovalori della seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

10) In una supermercato, le persone arrivano secondo un flusso di Poisson di parametro $\lambda = 3$ alle due casse disponibili. Il tempo che ciascun utente impiega per pagare il conto è distribuito esponenzialmente con frequenza $\mu = 6$. Nell'ipotesi in cui il numero massimo di posti di attesa alle casse sia $r = 12$, calcolare:

- il numero medio di utenti presenti nel sistema,
- la probabilità che si verifichi una perdita.