TRACCIA 1

Il candidato svolga un tema e risolva almeno due esercizi (scelti in almeno due aree diverse) fra quelli proposti.

Temi

1) Confronto di almeno due diversi metodi di deduzione in logica matematica.

2) Problemi di immersione in Teoria degli Anelli.

3) Si descriva la classificazione delle coniche nel piano, dimostrando alcuni tra i principali risultati.

4) Il problema di Cauchy per le equazioni differenziali ordinarie.

5) Moti piani di un punto materiale con particolare riguardo ai moti centrali.

6) Metodi diretti per la risoluzione numerica di sistemi lineari.

7) Processi stocastici.

Esercizi

1) Sia $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ e indichiamo con $\wedge$ l'operazione di minimo tra due elementi.

Esaminare i possibili isomorfismi tra le seguenti strutture algebriche e motivare le risposte.

$(\mathbb{R}_+, \cdot)$, $(\mathbb{R}_+, +)$, $([0,1], \wedge)$, $([2,3], \wedge)$, $([0,1[, \wedge)$.

Inoltre esaminare i possibili isomorfismi tra le seguenti strutture relazionali e motivare le risposte.

$(\mathbb{R}_+, \leq)$, $(\mathbb{Q}_+, \leq)$, $([0,1], \leq)$, $([2,3], \leq)$, $([0,1[, \leq)$.

2) Sia R un anello commutativo unitario e sia P un ideale primo di R. Si provi che esiste un ideale Q contenente P che è massimale tra gli ideali primi di R contenenti P. Si provi poi che Q è un ideale massimale di R. (Un ideale proprio P di un anello commutativo è primo se da $ab \in P$ segue che $a \in P$ o $b \in P$).

3) Si provi che un gruppo ha esattamente 3 sottogruppi se e solo se è ciclico di ordine p^2, con p primo.

4) Provare che ogni gruppo ortogonale reale $O(n, \mathbb{R})$ è un gruppo topologico compatto con due componenti connesse. Dare modelli alternativi del gruppo speciale ortogonale $SO(2, \mathbb{R})$.

5) Integrare la seguente equazione differenziale:

$$xy' + y = y^2 \log x.$$

6) Studiare la convergenza della serie:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n + 1}{n + 3} x^n$$

e calcolarne la somma.

7) Determinare l'asse centrale del sistema di vettori paralleli $(A, \mathbf{u})$, $(B, \mathbf{v})$, $(C, \mathbf{w})$, dove

$$\begin{array}{ll} \mathbf{u} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k} & A = (1, 1, 0) \\ \mathbf{v} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k} & B = (0, 0, 1) \\ \mathbf{w} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k} & C = (0, 1, 1) \end{array}$$

8) Si costruisca la successione delle prime iterate calcolate mediante i metodi di bisezione, delle secanti e di Newton nell'approssimazione della radice di $f(x) = x^2 - 2$ sull'intervallo $[1, 3]$.

9) Determinare il polinomio che interpola i punti $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $x_1 = 1$, $y_1 = 2$ e $x_2 = 4$, $y_2 = 2$.

10) Dato il sistema a coda $M/M/1/3$ con frequenza degli interarrivi $\lambda = \frac{1}{3}$ e frequenza di servizio $\mu = \frac{1}{6}$, calcolare i principali indici di prestazione.